PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 6 — 15. März 1930 — Redaktionsschluß für Nr. 8 am 1. April 1930. — 31. Jahrgang

INHALT:

Originalmitteilungen:

R. A. Millikan, Bemerkungen zur Geschichte der kosmischen Strahlung. S. 241.

R. Grinfeld, Das Gesetz von Grimm und die Ionisations-Potentiale der Moleküle von H_2O und NH_3. S. 247.

W. Jazyna, Thermodynamische Wärmeleitungstheorie. S. 253.

W. Kucharski, Schwingungen von Membranen in einer pulsierenden Flüssigkeit. S. 264.

W. Kolhörster, Bestimmung der Konstanten, insbesondere der Kapazität von Strahlungsapparaten. S. 280.

V. F. Hess u. A. Reitz, Zur Kapazitätsbestimmung von Strahlungsapparaten. S. 284.

Personalien. S. 288.

Gesuche. S. 288.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Bemerkungen zur Geschichte der kosmischen Strahlung*).

Von Robert A. Millikan.

Im allgemeinen scheinen mir Prioritäts-Streitigkeiten — außer vielleicht für den Historiker — der Wissenschaft nicht sehr dienlich zu sein; ich selbst habe daher eifrigst versucht, alle Anteilnahme daran zu vermeiden. Ich habe auch jetzt kein eigentliches Interesse, daran teilzunehmen. Wenn ich auf das dringende Verlangen einiger deutschen Freunde hin diese eine Erklärung abgebe, so geschieht das, damit diejenigen, die mich nicht kennen, durch die große Zahl unrichtiger Darstellungen und Folgerungen, die in letzter Zeit in Besprechungen sowohl in populären als auch wissenschaftlichen Zeitschriften und Broschüren in bezug auf das Thema „Cosmic Rays" (und ich habe niemals, weder direkt noch indirekt, irgendeine andere Bezeichnung gebraucht oder gut geheißen, weiß ich doch von keiner, die besser zutreffend wäre), nicht irregeführt werden, und hauptsächlich um sie zu bitten, sich ein vorurteilsloses Urteil zu bilden, indem sie zuerst einmal die Veröffentlichungen lesen, die ich zum Teil allein, zum Teil unter Mitwirkung anderer geschrieben habe, und sich nicht zu sehr auf Kritiken oder Zeitungsüberschriften zu verlassen. Für diese letzteren, ob günstig oder absprechend — es sind solche von beider Art erschienen — kann ich selbstverständlich keine Verantwortung übernehmen; und ebenso bin ich außerstande, die Zeit für die Berichtigung aller irrigen Darstellungen und Behauptungen zu finden. Sie sind zu zahlreich.

Die von mir allein und unter Mitwirkung anderer veröffentlichten Publikationen (die hauptsächlichsten der hier in Betracht kommenden, für welche ich irgendeine Verantwortung habe, sind die unten durch die Bezugnahme auf die Nummern: [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10]) bezeichneten) sind mit aller Sorgfalt abgefaßt worden, um dem Leser die richtige geschichtliche Perspektive für die Entwicklung des Gebietes zu geben, d. h. darzulegen, wie die Lage war, als wir unsere eigenen in diesen Publikationen beschriebenen Ergebnisse erlangten, soweit es die durch deren Art gebotene Kürze erlaubte. Ich bin auch bis jetzt weder auf eine irrige Behauptung, Schlußfolgerung, noch ein Versehen in unserer Darstellung der wesent-

*) Ich bin Herrn Alexander Goetz sehr zu Dank dafür verpflichtet, daß er die Verantwortung für die Übersetzung dieser Arbeit aus dem Englischen übernahm.

1) R. A. Millikan, Proc. Nat. Acad. Sci. **12**, 48—55, 1926.

2) R. A. Millikan and I. S. Bowen, Phys. Rev. **27**, 353—361, 1926.

3) R. A. Millikan and R. M. Otis, Phys. Rev. **27**, 645—658, 1926.

4) R. A. Millikan and G. H. Cameron, Phys. Rev. **28**, 851—868, 1926.

5) R. A. Millikan, Proc. Amer. Phil. Soc. **65**, 68—78, 1926.

6) R. A. Millikan and G. H. Cameron, Phys. Rev. **31**, 163—173, 1928.

7) — — Nature **121**, 19—26, 1928.

8) — — Phys. Rev. **31**, 921—930, 1928.

9) — — Proc. Nat. Acad. Sci. **14**, 637—641, 1928.

10) — — Phys. Rev. **32**, 533—558, 1928.

lichen geschichtlichen Entwicklung dieses Gebietes aufmerksam gemacht worden. Ehe diese in Rede stehenden Publikationen der Öffentlichkeit übergeben wurden, haben sie (wie es mit meinen wichtigeren Schriften gewöhnlich geschieht) drei der am besten informierten Physiker meiner Bekanntschaft gelesen und gebilligt, einer derselben ein hervorragender europäischer Wissenschaftler, zu dem Zweck möglichst zuverlässiger Beurteilung der Darstellung und der Schlußfolgerungen.

Trotz aller dieser Sorgfalt scheinen Mißverständnisse entstanden zu sein, die zu einer mir sehr bedauerlich erscheinenden Mentalität geführt haben wie z. B. in der Abfassung der Einleitung und verschiedener anderer Stellen der Veröffentlichung der Herren Kolhörster usw. (Physik. Zeitschr. **29**, 705, 1928). Meine deutschen Freunde drängen mich, diesen Artikel zu erwidern, um, soweit das noch möglich ist, die weitere Verbreitung von diesen Mißverständnissen zu verhüten.

Ich kann in einem kurzen Artikel dies nur durch nochmalige Darlegung der wesentlichsten Elemente der geschichtlichen Entwicklung und durch Verweisung auf ein vollständigeres Literaturverzeichnis, wie es z. B. in der vorzüglichen Monographie in Meyer und Schweidlers Radioaktivität (Teubner 1927) Kapitel 7, S. 546 bis 624 zu finden ist, bewerkstelligen.

Die Darlegungen dieser Verfasser zeugen von größter Objektivität und geben ein so vollständiges Literaturverzeichnis als man nur erwarten kann, nichtsdestoweniger möchte ich im folgenden ihrer Bibliographie einige weitere Quellen hinzufügen, die für künftige Verfasser nützlich sein könnten.

Der wichtigste Beitrag meiner Mitarbeiter und meiner selbst zu dem ganzen Gebiet der kosmischen Strahlung besteht in den folgenden beiden Errungenschaften:

1. In der Erlangung experimenteller Ionisationstiefenkurven, welche zeigen, daß die kosmische Strahlung die Struktur von Spektralbanden besitzt, und zwar von solcher Frequenz bzw. Durchdringungsvermögen, daß, wenn Einsteins Gleichung und Astons Kurve richtig sind, sie weder durch radioaktive oder sonstige Atomzerfallsprozesse, noch durch Stoßionisation durch Elektronen bis zu 216 000 000 Volt gedeutet werden können, sondern wahrscheinlich durch Atomaufbauprozesse.

2. Im eindeutigen experimentellen Beweis der Örtlichkeit, an der diese Atomaufbauvorgänge vor sich gehen.

Ich habe in früheren Artikeln niemals den Ursprung und die Geschichte der spekulativen Ideen des Atomaufbaus in kosmischen Prozessen zu ergründen versucht — eine sehr heikle Angelegenheit, da während der letzten zwanzig Jahre diese Frage sozusagen Allgemeingut geworden ist; aber wenn es den Historikern dieses Gebiets etwas nützen kann, will ich gerne hier die Geschichte meiner eigenen Kenntnisse dieser Frage erörtern.

Bereits im Jahre 1904, als ich mit dem Studium des Verhältnisses der Radioaktivität zum Urangehalt gewisser Erze[11]) beschäftigt war, kam in der Universität von Chicago Professor F. R. Moulton zu mir mit der Erklärung, daß, wenn die Sonne ursprünglich aus reinem Uran bestanden hätte, sie nicht imstande gewesen wäre, so viel Energie abzugeben, als zu ihrer von ihm als Minimum betrachteten Lebensdauer erforderlich war, und daß daher der kosmische Energiehaushalt eine bisher unbekannte Quelle einer Sternenenergie postuliere.

Nun war diese Quelle in der Tat bereits gefunden, obgleich ich damals noch nicht imstande war, sie völlig zu würdigen; die Auswechselbarkeit von Masse und Energie war nämlich im Jahre 1901 für spezielle Fälle durch die Experimente von Kaufmann demonstriert worden und der einige Jahre zuvor entdeckte Strahlungsdruck ist von ebenso großer Bedeutung. Einstein erkannte ein paar Jahre später (1905), in dieser Auswechselbarkeit eine allgemeine Folge der speziellen Relativitätstheorie[12]), und von der Zeit an war diese Theorie jedermann zugänglich, der, wie Professor Moulton, eine neue Energiequelle zur Erklärung der Lebensdauer der Himmelskörper suchte. Sie war in sicherlich weniger als zehn Jahren Thema allgemeinen Tischgesprächs in der Universität von Chicago geworden. Sobald in den Jahren 1913—14 die Moseleyschen Beziehungen und die Existenz der Isotopen gefunden worden waren, wurde die Atombildung innerhalb der Sterne, welche verknüpft ist mit der Umwandlung von überschüssiger Masse in Strahlung als Energiequelle der Sterne betrachtet. Harkins (Phil. Mag. **30**, 723, 1915) besprach ausführlich diesen Verlust an Masse oder „packing effect" in dem Atomaufbauprozeß. Ich besprach diese Angelegenheit in der ersten Auflage meiner im Jahre 1917 veröffentlichten Schrift „The Electron", Seite 203.

Daß diese Erscheinung nicht genügt, die Gesamtheit der Energie im Weltenraum zu erklären, darauf wurde später hingewiesen. In „Nature" (**99**, 445, 1917) erwähnt Eddington

11) R. A. Millikan, Proc. Intern. Congress of Arts and Sci. IV 1906.

12) Einstein, Ann. d. Phys. **18**, 639, 1905.

die Idee der Gesamtvernichtung der Masse durch Zusammenfallen und vollständige Überlagerung der positiven und negativen Elektronenfelder und schreibt die Idee Jeans zu (Nature 70, 101, 1904).

So hatte sicherlich bereits 1915 die Idee des Aufbaus der Elemente aus Wasserstoff als Quelle der Weltenraumsenergie und im Jahre 1917 die Idee der „Zerstrahlung" von Masse als einer noch wirkungsvolleren Ursache definitiv ihren Weg in die Literatur der Physik gefunden und waren jedenfalls auch in den physikalischen Laboratorien anderer Universitäten außer Chicago schon sehr geläufig; denn diese Ideen sind offensichtliche Folgerungen der Einsteinschen Gleichung (1905) und der bewiesenen Existenz der Isotopen (Wasserstoff mit einem Atomgewicht von 1,008 anstatt von 1).

In unseren Besprechungen in Chicago bestand W. D. MacMillan stets besonders darauf, daß man noch einen Schritt weitergehen und die Idee des Wärmetodes aufgeben solle durch die Annahme, daß die Atombildung im Weltraum durch Verdichtung der Strahlungsenergie zu Atomen vor sich gehe. Er besprach diese Theorie mit mir ausführlich im Jahre 1915, und im Juli 1918[13]) veröffentlichte er diese Ideen in aller Vollständigkeit. Jeder, der sich für die Geschichte dieser Frage interessiert, sollte auch MacMillans andern Artikel[14]) lesen; denn dieser Forscher ist unter den Theoretikern der hauptsächlichste Vertreter der Idee der Entwicklung der kosmischen Energie durch Atomaufbauprozesse.

Diese drei Ideen also, erstens der Atomaufbau aus Wasserstoff, zweitens die Zerstrahlung von Masse und drittens die Verdichtung der Strahlungsenergie zu Atomen, sind die Hypothesen, die wir teilweiser experimenteller Prüfung unterworfen haben.

Bisher haben wir uns nicht damit abgegeben, irgend jemandem die Priorität in bezug auf spekulative Ideen zuzuschreiben, da wir es nur als unsere Aufgabe erachteten, zu zeigen, inwiefern unsere experimentellen Ergebnisse für diese jetzt überall geläufigen Vorstellungen von Bedeutung sein konnten. Wir haben einen ersten kleinen Schritt vorwärts getan zum quantitativen Beweis für den kosmischen Ursprung der Strahlung, als wir im Jahre 1925 darauf hinwiesen, daß die größte beobachtete Wellenlänge nach unserer damals verwendeten Berechnungsmethode genau mit der Energie übereinstimmte, welche nach Einsteins Gleichung der Bildung von Helium aus Wasserstoff entspricht; und im vorletzten Winter (Februar 1927) fanden wir den bedeutend zuverlässigeren Beweis, daß diese und auch gewisse andere Atomaufbauprozesse, die tatsächliche Ursache der kosmischen Strahlung darstellen[15]). Weiterhin erbrachten wir einen Beweis dafür, daß entgegen allen bisherigen Annahmen, soweit wir wissen, außer vielleicht der Annahme MacMillans, diese besonderen Atomaufbauprozesse nicht in den Sternen selbst stattfinden, sondern in den Tiefen des Weltraumes.

Wenn es jemanden gibt, nächst Einstein, welcher in der Entwicklung der theoretischen Idee, für welche wir gewisse experimentelle Belege gefunden haben, ein Pionier war, so ist es W. D. MacMillan. Jeder, der seit 1918 versucht hat, die Geschichte der Entwicklung der Theorie der Atombildung in kosmischen Prozessen zu schreiben, hätte ihm dafür die gebührende Anerkennung zuteil werden lassen sollen.

Soviel sei über die frühere Geschichte der Aufbauideen, soweit ich persönlich damit in Berührung gekommen bin, gesagt. Sie mögen sich auch anderwärts unabhängig entwickelt haben; wenn dies der Fall, war mir jedenfalls nichts davon bekannt.

Nun zur experimentellen Geschichte der durchdringenden Strahlung, welche bekanntlich jetzt z. T. auf Strahlung kosmischen Ursprungs zurückgeführt wird. Dr. Cameron und ich haben versucht, sie so genau und so gerecht darzustellen, als es in der kurzen für den betreffenden Vortrag, welcher in der zitierten Arbeit kritisiert wurde, zur Verfügung stehenden Zeit möglich war, und ich hoffe, daß meine Kritiker diesen Vortrag um der gerechten Beurteilung seiner Mentalität und seines Tatsachenmaterials willen lesen. Die noch folgenden Ausführungen können am besten um die Antworten auf die kritische Diskussion gruppiert werden.

Der Vortrag selbst war ein Abendvortrag, den ich gebeten worden war, vor der „British Association for the Advancement of Science at Leeds" im September 1927 zu halten. Er bestand in einem Bericht über die kürzlich von Dr. Cameron und mir vorgenommenen Messungen der kosmischen Strahlung. In der Darlegung unserer neuen Resultate bemühte ich mich, den Eindruck zu vermeiden, als stände unsere Arbeit allein da, und um diesen Punkt zu betonen, erklärte ich meiner Hörerschaft, daß mein Thema „a very beautiful illustration of the slow step-by-step process by which most advances in science are made, each experimenter building upon

13) W. D. MacMillan, Astrophysical Journal **48**, 35, 1918.

14) W. D. MacMillan, Science **62**, 3. u. 24. Juli 7. August 1925.

15) Vgl. Millikan and Cameron, Phys. Rev. **32**, 533—557, 1928.

the past, but pushing on, if he is fortunate, a little beyond where his predecessors had gone," etc. . . . darstelle. Ich betonte dies einzig und allein deshalb, um allen uns nicht zukommenden Kredit für den Gegenstand des Vortrages abzulehnen, und um gleichzeitig eine alte Wahrheit zu betonen, die allgemein übersehen wird, und die dies vorliegende Problem außerordentlich gut illustriert, wie selbst eine oberflächliche Bekanntschaft mit der Entwicklungsgeschichte der kosmischen Strahlung jedem vorurteilsfreien Beobachter klar machen wird. Ich dachte gar nicht daran, die Arbeit irgendeines Vorgängers zu diskreditieren, wie man mir in der zitierten Kritik vorwirft; bringt doch das inzwischen im Druck erschienene Manuskript die vollständige Aufzählung der wesentlichen Beiträge früherer Autoren.

Dr. Kolhörster war unter den Hörern, und in einer freundschaftlichen Privatunterredung deutete er auf keine Berichtigung hin, die gemacht werden könnte; auch äußerte er keine Meinungsverschiedenheit irgendwelcher Art, so daß ich allen Grund hatte anzunehmen, daß er mit meiner Darstellung der geschichtlichen Tatsachen durchaus einverstanden sei. Was nun diese geschichtliche Einleitung betrifft, so war der Vortrag im wesentlichen im Einklang mit der späteren Publikation, lediglich die Fußnoten wurden nicht verlesen. Ich war daher sehr erstaunt, daß Herr Kolhörster unter anderen die durchaus unbewiesene und mit den Tatsachen nicht im Einklang stehende Behauptung stützt, ich habe von Nernst und von v. Schweidler Ideen geborgt, ohne ihnen dafür gebührenden Kredit zu geben. („Die Ergebnisse dieser beiden Autoren werden von Millikan und Cameron durchwegs benutzt aber nirgends zitiert.")

Tatsache ist, daß ich niemals ein geschriebenes Wort auf diesem Gebiet von meinem Freund und früheren Lehrer Professor Nernst gesehen habe, und daß ich nur aus Dr. Kolhörsters Arbeit und aus dem ganz kürzlich von Professor v. Schweidler veröffentlichten ausgezeichneten Buch „Radioaktivität", Seite 607 ff. (herausgegeben 1927) weiß, daß Professor Nernst einen örtlich begrenzten Ursprung der Strahlung angedeutet hatte, was nicht in Übereinstimmung mit unseren eigenen Beobachtungen der gleichmäßigen Verteilung durch den ganzen Raum ist. Um daher nicht die Aufmerksamkeit auf die Meinungsverschiedenheit in diesem Punkt zu lenken und damit dem Vortrag eine polemische Färbung zu geben, begnügte ich mich einfach mit der kurzen Darlegung der experimentellen Tatsachen, daß nämlich Dr. Cameron und ich bis jetzt keinen Richtungseffekt der kosmischen Strahlung gefunden hätten, „a result at variance with results reported by Büttner and Kolhörster". Es würde wohl schwierig sein, eine größere Divergenz zwischen den Motiven des Autors und ihrer Deutung durch den Leser anderwärts zu finden.

Was ferner das Borgen theoretischer Ideen von Professor v. Schweidlers Veröffentlichung anbetrifft, so haben wir weder die ihm zugeschriebenen Ansichten von einer „gleichmäßig verteilten strahlenden Materie" verteidigt noch besprochen. Wir hatten in dem in Frage stehenden Artikel kein anderes Ziel als unsere neuen experimentellen Resultate zu bringen, die wenigstens uns zur definitiven Unterscheidung zwischen der ersten und zweiten der unten erwähnten drei möglichen Hypothesen über den Ursprung der Strahlung gute Dienste zu leisten schien. Diese Hypothesen sind so häufig besprochen worden, daß sie bereits 1909 Allgemeingut waren. Hypothesen 2 und 3 wurden bis zum Jahre 1925 als möglich erachtet und andauernd diskutiert[16]). (Siehe im besonderen die zusammenfassende Darstellung von A. Wigand in Physik. Zeitschr. Bd. 25, S. 445—463.) Die drei Hypothesen sind die folgenden:

1. Die Hypothese eines außerirdischen Ursprunges.

2. Die Existenz eines radioaktiven Stoffes in der ganzen oberen Atmosphäre.

3. Die einer allgemeinen Radioaktivität der Erdrinde.

Es ist zu hoffen, daß jeder, der sich für die Geschichte dieses Gebietes interessiert, das umfangreiche Literaturreferat lesen wird, welches die meisten Publikationen zitiert, die bis zum Jahre 1909 erschienen sind (Physik. Zeitschr. 10, 836, 1909). Der Verfasser der Übersicht, Kurz, verwarf die erste Hypothese, welche er ganz richtig Richardson 1906 zuschrieb, und auch die zweite, und nahm die dritte an, als diejenige, die allen damals bekannten Erfordernissen entsprach, eine Schlußfolgerung, die jedoch zuerst auf Grund der Gockelschen Luftballonbeobachtungen in den Jahren 1910 und 1911 sich als völlig unhaltbar erwies, Beobachtungen, durch welche in drei verschiedenen Ballonaufstiegen, deren Resultate alle wesentlich miteinander übereinstimmten, bewiesen wurde, das Ionisation in höheren Atmosphärenschichten (bis zu 4500 Metern) in luftdichten Behältern größer ist als in niedrigen, während Kurz und andere in 1909 veröffentlichten definitiven Berechnungen zeigten, daß mit der Erde als Quelle die Ionisation prak-

16) Hoffman, Physik. Zeitschr. 28, 40, 669, 1925.

tisch zu Null werden müßte, sobald man nur 1000 Meter hinaufginge. Gockels tatsächliche Ablesungen bei zwei Aufstiegen mit einem Elektroskop, das absichtlich so konstruiert war, um Druckausgleich mit der Umgebung zu erhalten, sowie diejenigen des dritten Aufstiegs, wo offenbar unabsichtlich dieselben Bedingungen vorlagen, wie er selbst annimmt, genügen völlig, unsere Behauptungen zu rechtfertigen. Wir nahmen diese Feststellung direkt von Gockel selbst[17]), wie auch von Heß[18]); denn der letztere sagt: „Gockels Messungen ergeben, wenn man auf normalen Luftdruck korrigiert, sogar eine schwache Zunahme der Strahlung mit der Höhe".

Der Punkt von wirklicher Bedeutung ist hier einfach die Tatsache, daß die Ablesungen in einer Höhe von über 1000 Meter nicht auf Null fielen, was man erwarten müßte, wenn die Erde als Ursprung der beobachteten Wirkung angesehen wird. Es wurde damit also endgültig die Hypothese, die bis zu der Zeit allgemein begünstigt worden war, als falsch erwiesen, und man zur Rückkehr zu den anderen von Kurz verworfenen Hypothesen gezwungen. Wir konstatierten lediglich diese Tatsache, indem wir sagten, daß dies „The most important step" seit 1903 gewesen sei. Gockel ist nun tot, und kann seine eigene Angelegenheit nicht vertreten, aber dies ist nur um so mehr Ursache, alle interessierten Forscher dringend zu ersuchen, den Bericht zu lesen und für sich selbst sprechen zu lassen. Im nächsten Jahre erweiterte Heß[19]), nachdem er Gockels Experimente wiederholt und nachgeprüft hatte, den Bereich auf 5200 Meter, wobei er die Messungen mehr quantitativ gestaltete, und sprach endlich zugunsten einer Rückkehr zur Hypothese Nr. 1 (wobei er indessen die Hypothese 2 nicht für ganz unmöglich erachtete*)).

Auch Kolhörster neigte ihr zu, als er seine Experimente von 1913 und 1914 interpretierte[20]). Es gab keine weiteren Beobachtungen irgendwelcher Art in dieser Entwicklung, soviel ich weiß, bis zum März und April 1922, als Bowen und ich[21]) unsere hochgehenden Luftballonaufstiege (15,5 km) unternahmen, mit dem Endzwecke einer strengen und entscheidenden Prüfung der Hypothese Nr. 1, die unterdessen durch v. Schweidlers[22]) endgültigen Wert des Absorptionskoeffizienten von 0,57 per Meter Wasser ergänzt worden war. Dieser Wert wurde von v. Schweidler aus durchaus zuverlässigen Daten von Heß und Kolhörster abgeleitet unter der Annahme, daß die Strahlung von außen kommt. Kolhörster selbst hatte $\mu = 0{,}55$ berechnet, wie in Meyer und v. Schweidlers Buch Seite 606 berichtet wird. Bowen und ich hatten zu jener Zeit keine anderen Beobachtungen als Hinweis; auch erschien ein Jahr lang nichts mehr. Da alle denkbaren Fehlerquellen unsere Resultate zu hoch ergeben würden, so war die Tatsache, daß unsere Ballons mit einer Entladung von nur ein Viertel des erwarteten Wertes herunterkamen, ein unzweifelhafter Beweis, daß eine Strahlung mit einem Koeffizienten, wie wir in unserer Berechnung angenommen hatten, nicht von außen kommen konnte; daß ferner, wenn die beobachteten Wirkungen überhaupt auf außerirdische Strahlung zurückzuführen waren, diese Strahlung viel kurzwelliger sein mußte, als früher angenommen worden war; wir berichteten in diesem Sinne auf der Versammlung der „National Academy of Sciences", die in Washington im April 1922 abgehalten wurde[21]). Dabei knüpften wir in keiner Weise bei unseren Vorgängern an. Es blieb uns auch nichts anderes übrig, als nur unsere Resultate zu berichten. Wir hatten in der Tat so viel Vertrauen auf Heß und Kolhörster als Beobachter, daß wir meinten, die große Diskrepanz zwischen deren Resultaten bis zu 9 km und unseren bis zu 15,5 km mache die Gültigkeit der Hypothese Nr. 1 so zweifelhaft, daß wir ein ganzes Jahr mit der Vorbereitung neuer Experimente zur Messung der Absorptionskoeffizienten der durchdringenden Strahlen zubrachten, die uns erlauben sollten, scharf zwischen Hypothese Nr. 1 und Hypothese Nr. 2 zu unterscheiden, nachdem Nr. 3 durch Gockels Experiment bereits endgültig ausgeschieden wurde, wie es nachträglich durch Heß, Kolhörster und uns selbst bestätigt worden ist. Als

17) Gockel, Physik. Zeitschr. **12**, 597, 1911.

18) Heß, Physik. Zeitschr. **12**, 1001, 1911.

19) Heß, Phys. Zeitschr. **12**, 998, 1911 und **13**, 1084, 1912.

*) Wigand charakterisiert in einer außerordentlich klaren Zusammenfassung (Physik. Zeitschr. 25, 457) die Situation wie folgt:

„Die Hypothesen über den Ursprung der durchdringenden Höhenstrahlung sehen die Strahlungsquelle entweder außerterrestrisch im Kosmos oder in den höheren Schichten der Erdatmosphäre (Hess, v. Schweidler, Seeliger). Aus dem mannigfachen Für und Wider läßt sich noch kein klares Bild erkennen, und man muß vorerst noch mit mehreren Möglichkeiten rechnen".

Leser, die daran interessiert sind, die bis 1924 erhaltenen Resultate gründlich kennenzulernen, sollten es nicht unterlassen, Wigands Artikel zu lesen.

20) Kolhörster, Physik. Zeitschr. **14**, 1153, 1913 und V. d. D. P. Ges. Juli 1914.

21) Millikan, Carnegie Institution of Washington Year Book no. 21, 1922, pp. 385—386; auch Millikan and Bowen, Phys. Rev. **22**, 198, 1923, und **27**, 353, 1926.

22) Elster-Geitel, Festschrift p. 413.

Dr. Otis und ich 18 Monate später auf der Spitze des Pikes Peak unsere Absorptionsmessungen in Blei und Wasser gemacht hatten, fanden wir, daß diese Diskrepanz zwischen Bowen und Millikans und Heß und Kolhörsters Ballonmessungen, die uns so viel Sorge gemacht, durch Dr. Kolhörsters Messungen im Jahre 1923 in den Alpen beseitigt worden war. Diese ergaben $\frac{\mu}{\rho} = 0{,}25$ per Meter Wasser, was in wesentlicher Übereinstimmung mit unseren Ballondaten ist, wie wir gezeigt haben[23]). Die Verschiedenheit in der zu erwartenden Ionisation an der Grenze der Atmosphäre entsprechend den Werten $\mu = 0{,}25$ und $\mu = 0{,}57$ ist außerordentlich groß, und die Ballonaufstiege waren die ersten, welche die Unhaltbarkeit des letzteren Wertes zeigten. Ich glaube, daß alle neuere Arbeiten auf diesem Gebiet eine Bestätigung dieser Schlußfolgerung bedeuten. Wir haben es niemals für notwendig erachtet, den Kritikern unserer Ballonaufstiege zu widersprechen, oder ihnen zu antworten, aus dem einfachen Grunde, weil die von uns erlangten Daten keine Ergänzung benötigen und inzwischen allgemein angenommen sind.

Unsere Kritiker beschuldigen Dr. Cameron und mich unrichtiger Darstellung, da wir gesagt haben, daß „up to this time the increasing rate of discharge was the sole phenomenon upon which the hypothesis of rays of cosmic origin rested", aber sie schieben das Jahr 1925 ein, anstatt das richtige Jahr 1922 anzugeben, und zitieren Kolhörsters Messungen von 1923, um unseren „Irrtum" zu zeigen. Die in Meyer und v. Schweidlers „Radioaktivität" (1927) auf Seite 606 gegebene Tabelle zeigt tatsächlich keinen Absorptionskoeffizienten, der bis zum Jahre 1922 in irgendeinem anderen Medium als Luft erhalten worden ist.

Der einzige sich noch erübrigende Punkt der Kritik unseres Artikels ist die Aussage, daß sich unsere Beobachtungen in großen Tiefen von hochgelegenen Seen, die durch die Schneeschmelze gespeist werden, nach langen Prüfungen als frei von radioaktiven Fehlerquellen erwiesen hätten und es somit das erstemal darstelle, daß der Nullpunkt eines Elektroskops einwandfrei bestimmt worden wäre. Unsere Kritiker denken, daß Bergwitz dasselbe gelang, als er im Jahre 1915 ein ungekapseltes Elektroskop in ein Salzbergwerk brachte und die Abwesenheit einer von radioaktiven Verunreinigungen der Umgebung herrührenden Strahlung annahm. Die Garantie einer sicheren und völligen Ausscheidung örtlicher und kosmischer Strahlung und damit einer zuverlässigen Nullpunktsbestimmung scheint uns Bergwitz' Experiment im Jahre 1915 kaum zu gewähren. Bei einem Instrument von einem Liter Inhalt mit Luftfüllung unter Atmosphärendruck war seine Ablesung 8 Ionen an der Oberfläche, 4 Ionen im Salzbergwerk. Bei einem Instrument vom selben Volumen und Druck war unsere Lesung: 7 Ionen an der Oberfläche, 1,6 Ionen 150 Fuß unter Wasser. Der große Unterschied in unserem Falle beruhte vielleicht auf der Tatsache, daß wir gegen alle örtlichen Einflüsse besser abgeschirmt hatten. Wir bezweifeln auf jeden Fall, daß Dr. Bergwitz selbst es eine Nullpunktbestimmung nennen würde, ohne vorausgegangene sorgfältige Prüfungen seiner Abschirmungen. Wir freuten uns aber nichtsdestoweniger über seine Experimente unterrichtet zu werden, da wir sie tatsächlich übersehen hatten.

Das schlimmste Mißverständnis der Sachlage ist jedoch nicht in direkter Verbindung mit meinen Veröffentlichungen über kosmische Strahlung (wenn auch wahrscheinlich indirekt durch falsche Auslegung ihrer Ziele), sondern in einer Besprechung einer kurzen Publikation aufgetreten, die ich auf Ersuchen der American Philosophical Society über: „The Last Fifteen Years of Physics"[24]) schrieb (Phys. Ber. April 1927, Vol. 8, p. 465, Nr. 7). In einer so kurzen Übersicht, wie ich sie dort über ein so großes Gebiet zu geben hatte, ist es natürlich undenkbar, daß zwei Personen dieselbe Gruppe von Fortschritten betonen. Wenn da eine nationale Bevorzugung in der Liste, die ich auswählte, zutage trat, so war ich deren völlig unbewußt. Weiter: solche Parteilichkeit wurde von dem bestunterrichteten europäischen Physiker meiner Bekanntschaft, welcher den Artikel durchsah, ehe er in den Druck ging, nicht bemerkt. Vielleicht ist das Mißverständnis und die falsche Darstellung des Artikels seitens des Kritikers früheren falschen Auffassungen zuzuschreiben, und möglicherweise z. T. dem Umstande, daß ich in dieser notwendigerweise etwas skizzenhaften Aufzählung einer Anzahl wichtiger Fortschritte wiederholt meine Schrift „The Electron" zitierte, oder auch auf meine ausführlicheren Arbeiten, wie die über kosmische Strahlung, Bezug nahm, einzig und allein zu dem Zwecke, dem Leser Gelegenheit zu geben, meine vollständigeren Besprechungen der in Frage stehenden Fortschritte selbst nachzulesen. Der Kritiker scheint diese Referenzen, ohne sie selbst gelesen zu haben, als Ansprüche auf von mir gemachte Entdeckungen aufgefaßt zu haben, während sie in Wirklichkeit nur die Geschichte der Fortschritte, durchaus objektiv dargestellt, enthalten. Tatsächlich sind solche

23) Millikan and Cameron, Phys. Rev. **31**, 172, 1926.

24) R. A. Millikan, Proc. Amer. Phil. Soc. **65**, 68—78, 1926.

Ansprüche weder gemacht noch angedeutet worden. Wiederum bitte ich daher den Leser, den in Frage stehenden Artikel selbst zu lesen, ehe er über ihn irgendwelche Schlüsse zieht.

In Anbetracht der Tatsache, daß der internationale Kontakt auf wissenschaftlichem Gebiet im Zunehmen begriffen ist — und das ist jetzt gewiß mehr als je zuvor der Fall — sollte die Hoffnung, daß sich die wissenschaftliche Kritik in steigendem Maß einer objektiven Ausdrucksform bedient, nicht zu unbescheiden sein.

Pasadena, Norman Bridge Laboratory of Physics California Institute of Technology.

(Eingegangen 1. Mai 1929.)

Das Gesetz von Grimm und die Ionisations-Potentiale der Moleküle von H_2O und NH_3.

Von Rafael Grinfeld.

1. Die Entdeckung von Hertz und Franck über die Existenz „kritischer Potentiale", für welche sich die Eigenschaften der Stöße zwischen Elektronen und Atomen ändern, indem sie von denjenigen vollkommen elastischer Stöße (also ohne Energie-Änderung) zu jenen „weicher Stöße", übergehen, wobei das Elektron seine ganze Energie oder einen Teil derselben abgibt, und die Beziehung zwischen diesen „kritischen Potentialen" und den energetischen Zuständen des Atoms (und damit auch den spektralen Termen gemäß der Quantentheorie), eröffneten ein neues Feld für das Studium, besonders für die Atom- und Molekularmechanik. Eine der wesentlichen Aufgaben besteht in der Bestimmung auf experimentellem Wege, sowohl der Anregungs- als auch der Ionisationspotentiale der größtmöglichen Anzahl von Atomen und Molekülen, vermittelst Elektronenstoßes.

Für einatomige Stoffe ist die Interpretation der erwähnten Vorgänge sehr einfach. Bei der Anregung des Atoms handelt es sich um den Übergang eines Elektrons von einem Energie-Niveau zu einem anderen und bei der Ionisation um die Lostrennung eines oder mehrerer Elektronen vom Atom.

Diese Betrachtungsweise läßt sich auch auf mehratomige Moleküle ausdehnen. In diesem Falle kann der unelastische Stoß die Lostrennung eines Elektrons aus dem Molekülverband wie im Falle des Atoms bedeuten und auch die Zersetzung des Moleküls unter Bildung von Ionen auf die eine oder andere Art[1]) hervorrufen. Welcher von diesen Vorgängen einem bestimmten kritischen Potential entspricht, ist nur nach der Methode von Smyth[1]), Kondratjeff und Semenoff[2]) bestimmbar, indem der Wert $\frac{e}{m}$ der durch Stoß gebildeten Ionen festgestellt wird.

Wir haben es uns zur Aufgabe gemacht, das Ionisationspotential des Wassermoleküls festzustellen, wofür Mackay[3]) den Wert $Vi = 13{,}2$ Volt angibt. Dieser Wert ist von Grimm[4]) zur Bildung seines Gesetzes verwandt worden, das dem über die Atome formierten entspricht. Letzteres lautet: „Die Atome der Elemente, die sich im periodischen System der Elemente eine bis vier Kolonnen links von einem Edelgas befinden, ändern ihre Eigenschaften durch Addition von einem bis vier Protonen, derart, daß die resultierenden Gebilde sich wie Pseudo-Atome der Elemente verhalten, die eine bis vier Stellen zu ihrer Rechten einnehmen."

Gemäß dieser Regel erhält man als Pseudo-Atome von F: OH, NH_2, CH_3; Pseudo-Atome des Ne sind: FH, OH_2, NH_3 und CH_4.

Die Werte der Ionisationspotentiale, die von Grimm für die Pseudo-Atome des Ne gebraucht wurden, sind: 21,5, 13,2, 11,1 und 9,5 Volt (vgl. Tab. I). Der Gang dieser Potentiale als Funktion der molekularen Refraktionen R_m und der Molekül-Durchmesser σ ist aus folgender Abbildung (Fig. 1) ersichtlich.

Tabelle I.

Ionisationspotentiale der Pseudo-Atome des Ne

Stoff	Volts	Autor[5])	
Ne	21,5	Hertz, G.	von Grimm benutzte Werte
H_2O	13,2	Mackay, C. A.	
	13,0 (?)	Foote u. Mohler	
NH_3	11,1	Mackay	
	9,5	Hughes, A. L. u. Dixon, A. A.	
CH_4	14,6	Pietsch, E. u. Wilcke, G.[6])	nicht mit Grimmschen Werten übereinstimmend
	14,5	Hogness, T. R. u. Kvalnes, H. M.[7])	
	14,5	Morris, I. C.[8])	

1) K. T. Compton u. F. L. Mohler, Ionisierungs- und Anregungspannungen. S. 125, Berlin 1925.

1) H. D. Smyth, Proc. Roy. Soc., London (A), **105**, 116, 1924.

2) V. Kondratjeff u. N. Semenoff, Zeitschr. f. Phys. **22**, 1, 1924.

3) C. A. Mackay, Phys. Rev. **24**, 327, 1924; Phil. Mag. **46**, 828, 1923.

4) H. G. Grimm, Zeitschr. f. Elektroch. **31**, 474, 1925.

5) J. Franck u. P. Jordan, Anregung von Quantensprüngen durch Stöße. S. 162 u. 286, Berlin 1926.

6) Pietsch u. Wilcke, Zeitschr. f. Phys. **33**, 342, 1927.

7) Hogness u. Kvalnes, Phys. Rev. (2), **32**, 942, 1928.

8) Morris, Phys. Rev. **32**, 456, 1928.

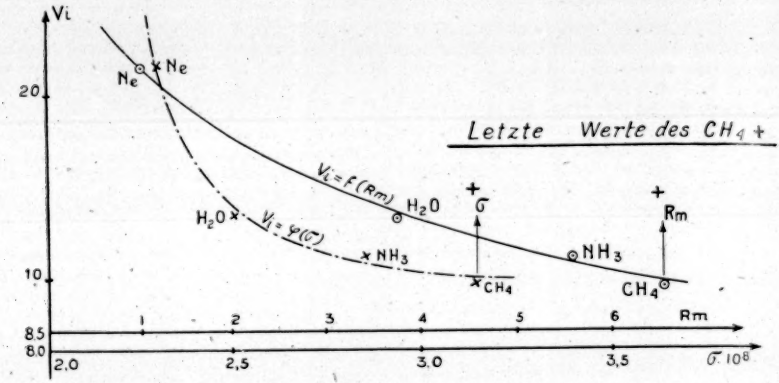


Fig. 1. Der Zusammenhang der Ionisierungs-Potentiale der Pseudo-Atome des *Ne* (nach Grimm) als Funktion von Molekularrefraktion *Rm* und Durchmesser σ. Wie ersichtlich, sind die neueren Werte von CH_4 mit den anderen nicht im Einklang.

In der Tab. I fügen wir Werte bei, die nach dem Erscheinen der Grimmschen Arbeit bekannt wurden, und die das Ionisationspotential von CH_4 betreffen. Diese Werte sind von verschiedenen Autoren erhalten worden, sind unter sich in Übereinstimmung und haben als Mittelwert: $V_i = 14{,}5 \pm 0{,}1$ Volt. Diese Werte sind abweichend von denjenigen durch die Grimmsche Theorie geforderten. Da die erwähnte Theorie von grundlegender Bedeutung ist und die anderen Werte experimenteller Arbeiten in Übereinstimmung mit ihr sind, erschien es uns von Wichtigkeit, die Ionisationspotentiale des Wassers und Ammoniaks wiederholt zu bestimmen.

2. Die Bestimmung des Ionisationspotentials von H_2O.

Die Versuchsmethode ist diejenige, die von Lenard[1]) angegeben wurde. Die verwendete Röhre ist in Fig. 2 wiedergegeben, *f* ist der Glühdraht aus Platin, der mit Oxyd überzogen ist.

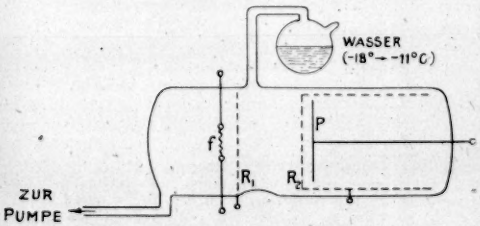


Fig 2. Elektronenstoßröhre.

1) Compton u. Mohler, loc. cit., S. 6.

R_1 und R_2 sind zwei Gitter aus feinem Platindraht und *P* schließlich eine Platinplatte.

Die vom Glühdraht ausgehenden Elektronen werden durch ein veränderliches Potential (V_1) beschleunigt und zwar findet diese Beschleunigung zwischen *f* und R_1 statt. Innerhalb des von R_1 und R_2 bestimmten Gebietes finden die Stoßereignisse statt. An den zusammengelöteten Teilen R_2 und *P* liegt eine Verzögerungsspannung $V = -40$ Volt, die größer ist als die Spannung V_1.

Die von uns verwandte Röhre hat zwei Gitter, weil sie auch zur Untersuchung der Anregungspotentiale benutzt werden soll. Zur Untersuchung der Ionisation verlöten wir das zweite Gitter mit der Platinplatte.

Alle Metallteile der Röhre sind, wie bereits bemerkt, aus Platin, so daß Kontaktpotentiale vermieden werden. Der Wasserdampf bewegt sich zwischen den beiden Gittern sehr rasch auf den Glühdraht zu, wegen des Destillationseffektes und wegen der während der Versuche im Betrieb befindlichen Pumpe. Letztere war mit der Röhre durch das Ende *E* über einen Rezipienten, der in Kohlensäureschnee tauchte (— 78°), um das Eindringen von Quecksilberdämpfen in die Röhre zu verhindern, verbunden.

Die Versuchsanordnung ist durch Fig. 3 wiedergegeben. Das Galvanometer, nach Desprez-d'Arsonval, hat eine Empfindlichkeit von $0{,}5 \cdot 10^{-9}$ Amp. Um alle Potentiale genau messen zu können, ist es unerläßlich, daß die Isolation des gesamten Stromkreises sehr gut ist. Die Isolatoren, die die Drahtleitungen trugen, waren aus mit Schwefel überzogenen trockenen Holzpflöcken hergestellt. Alle Unterbrecher und

Akkumulatoren standen auf guten Ebonitplatten und alle Drahtverbindungen wurden gelötet.

Für die Herstellung des Hochvakuums benutzten wir eine Quecksilber-Dampf-Strahlpumpe nach Langmuir, die eine Sauggeschwindigkeit

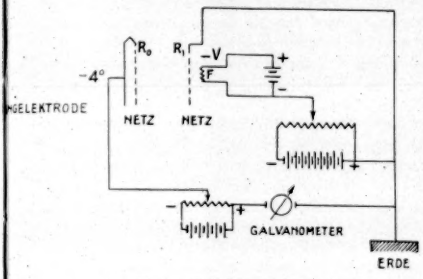


Fig. 3. Schaltungsschema.

von 10 Litern pro sek hat. Als Vorpumpe diente eine Quecksilber-Rotationspumpe nach Gaede der Firma Leybold.

Die Messungen. In der Fig. 4 geben wir zwei Kurven wieder, die einer Wassertemperatur von — 17° und — 11° entsprechen. Die Dampfspannung war daher 1,03 und 1,78 mm.

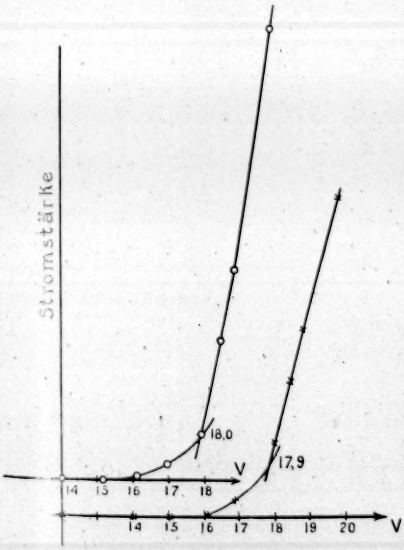


Fig. 4. Ionisierungskurven des H_2O-Dampfes nach der Lenardschen Methode.

Bekanntlich rührt der erste konkave Teil der Ionisationskurve vom Photoeffekt des Lichtes her, das die angeregten Atome aussenden, und das um so mehr zunimmt, je mehr sich die Energie der Elektronen der der Ionisation entsprechenden Voltzahl nähert. Diese Strahlung, die im allgemeinen im tiefen Ultraviolett liegt, befreit Elektronen aus der Platte und bringt so einen Strom hervor, der im Galvanometer gemessen wird und der die gleiche Richtung hat wie derjenige, der von den positiven Ionen, die nach der Platte gelangen, gebildet wird. Für die in dem erwähnten Teil der Kurve bemerkbaren Abweichungen sind auch jene Elektronen verantwortlich zu machen, deren Austrittsgeschwindigkeit aus dem Glühdraht derart ist, daß sie, derjenigen der Elektronen, die das Potentialgefälle hervorbringen, superponiert, eine Geschwindigkeit ergeben, die der kritischen Ionisationsgeschwindigkeit gerade gleich, oder sogar größer ist.

Wenn man auch für kompliziertere Moleküle die Erscheinungen bei Atomen nicht ohne weiteres anwenden kann, so vermuten wir doch, daß auch in dem ersten Teil der erhaltenen Kurven ähnliche wenn nicht die gleichen Vorgänge zu erwarten sind, wie wir sie soeben beschrieben haben. Daraus geht aber hervor, daß man als Ionisationspotential jenen Punkt zu wählen hat, bei dem ein plötzlicher Anstieg des im Galvanometer gemessenen Stromes zu bemerken ist. Wie aus der ersten Kurve ersichtlich ist, liegt das gesuchte Potential bei 18,0; die zweite Kurve gibt das gesuchte Potential bereits bei 17,9 Volt. Der Fehler kann nicht größer als 0,5 Volt sein, wie wir weiter unten sehen werden.

Offenbar handelt es sich bei unseren Messungen um die Bildung des Ions H_2O^+ und die Befreiung eines Elektrons. Für diesen Fall wäre die Annahme verschiedener Autoren bestätigt, daß ein Molekül größere Anregungsenergien, als diejenigen der Dissoziation entsprechenden aufnehmen kann.

3. Bestimmung des Ionisationspotentials von NH_3.

Vermittelst der gleichen Methode, aber mit etwas abgeänderter Röhre, wurde das Ammoniak untersucht. Die Herstellung desselben erfolgte unter Verwendung chemisch reiner Produkte von Merck. Der chemische Prozeß verlief nach folgender Gleichung:

$$CaO + 2\,ClNH_4 = 2\,NH_3 + Cl_2Ca + H_2O.$$

Die gut gepulverten und gemischten Grundstoffe wurden in einem geschlossenen Rezipienten langsam erwärmt. Der Rezipient bestand aus sehr schwer schmelzbarem Glas. Vor seiner Ver-

wendung wurde das erhaltene Ammoniak zum Trocknen durch verschiedene Gefäße geleitet, die mit CaO beziehungsweise mit KOH gefüllt waren. Danach gelangte das so erhaltene Gas in ein Glasgefäß, das in flüssige Luft tauchte,

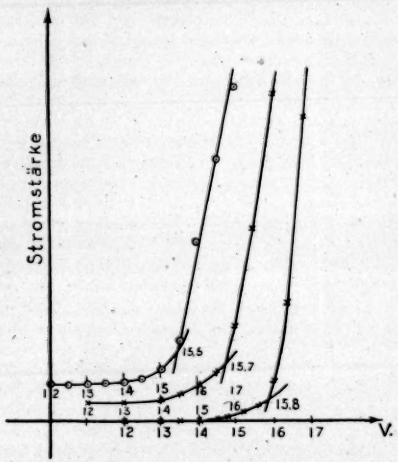


Fig. 5. Ionisierungskurven des NH_3 nach der Lenardschen Methode.

so daß Kondensation erfolgte. Das letztgenannte Gefäß stand mit der Versuchsröhre in Verbindung, von wo auch eine Verbindung mit der Luftpumpe ausging.

In der Fig. 5 geben wir drei der erhaltenen Ionisationskurven wieder. Die erhaltenen Potentiale sind danach 15,5, 15,7 und 15,8 Volt. Der aus den Resultaten von sieben Versuchsreihen resultierende Mittelwert ist 15,7 Volt. Daß die verschiedenen Resultate doch noch einen Unterschied aufweisen, ist wohl einerseits durch die graphische Methode der Bestimmung des Punktes, an dem ein plötzliches Ansteigen der Kurve einsetzt, zu erklären und andererseits dem Umstande zuzuschreiben, daß die verschiedenen Kurven bei verschiedenen Temperaturen des Glühfadens aufgenommen wurden. Auf jeden Fall ist die erhaltene Differenz nicht größer als 0,5 Volt.

Um den notwendigen Korrektionsfaktor zu erhalten, der unter anderem auch durch die Anfangsgeschwindigkeit der Elektronen verursacht ist, bestimmen wir das Potential des Quecksilbers. Dieses resultiert als 10,0 Volt, was anzeigt, daß wir die erhaltenen Werte des Ammoniaks um 0,4 Volt vergrößern müssen. Wir erhalten somit als definitiven Wert 16,1 Volt $\pm$ 0,5.

4. Die für die Potentiale von Wasser und Ammoniak erhaltenen Werte und ihre Beziehung zum Grimmschen Gesetz.

Die Tab. II gibt die erhaltenen, beziehungsweise die bereits bekannten Werte der Ionisationspotentiale der Pseudo-Atome des Ne wieder und die Fig. 6, die der Fig. 1 entsprechenden Kurven, d. h. das Ionisationspotential V_i in Abhängigkeit von der Molekularrefraktion R_m und dem Molekulardurchmesser σ. Die Anpassung unserer

Tabelle II.

Stoff	Volts	Autor
Ne	21,5	Hertz, G.
H_2O	18,0 $\pm$ 0,5	Grinfeld, R.
NH_3	16,1 $\pm$ 0,5	Grinfeld, R.
	14,6	Pietsch, E. u. Wilcke, G.
CH_4	14,5	Morris, J. C.
	14,5	Hogness, T. R. u. Kvalnes, H. M.

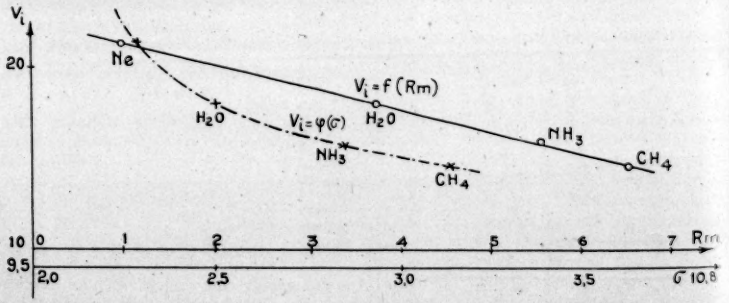


Fig. 6. Neuere Kurven, die den Zusammenhang der Ionisierungs-Potentiale der Pseudoatome des Ne als Funktion von Rm und σ wieder herstellen. Gebraucht sind: der von Grimm benutzte Wert für Ne, unsere Werte für H_2O und NH_3 und der vorher erwähnte Wert für CH_4.

Werte an die, durch die bereits bekannten Werte von Ne und CH_4 bestimmte, Grimmsche Kurve ist sehr gut.

5. Über einige Anregungspotentiale des Wasser-Moleküls.

Mit der gleichen Versuchsmethode haben wir unsere Untersuchungen fortgesetzt und Anregungspotentiale des Wassermoleküls bestimmt. Nach der Methode von Franck und Hertz[1]) haben wir die Apparatur wie folgt abgeändert:

a) Die Verbindung zwischen dem Gitter R_2 und der Platte P wurde gelöst, dagegen eine zwischen den beiden Gittern R_1 und R_2 hergestellt. Auf diese Art gelingt es, den in dem Raume f-R_1 beschleunigten Elektronen ein konstantes Potential aufzudrücken (Null in unserem Fall), so daß sie mit konstanter Geschwindigkeit gegen die Gasmoleküle auftreffen können, und damit die Wahrscheinlichkeit eines Stoßes erhöhen und die Wirkung auf den Ausfall der Anregungskurve ändern.

Unterhalb des geringsten Anregungspotentials (Resonanzpotential), wirken sich die Stöße bekanntlich ohne Energiewechsel aus, so daß die Elektronen wegen ihrer kinetischen Energie, die sie in dem Raume f-R_1 erhalten, an die Platte gelangen können. Es entsteht daher in dem Kreise des Galvanometers ein Strom, solange zwischen R_2 und P kein Verzögerungspotential vorhanden, das größer als das Beschleunigungspotential ist. Aus diesem Grunde erfolgt die folgende weitere Abänderung:

b) Anstatt der — 40 Volt legen wir an die Platte ein kleines Potential, das kleiner als — 2 Volt ist.

Die Spannung des Wasserdampfes wurde wie vorher verändert, und zwar zwischen 2 und 0,001 mm Quecksilberdruck, vermittelst des Kältegemisches aus Eis und Salz und Kohlensäureschnee in Äther. Außerdem war die Vakuumpumpe ständig in Tätigkeit.

Im folgenden geben wir in der Fig. 7 zwei Kurven, die mit der Röhre, die wir zur Bestimmung des Ionisationspotentials verwendeten, erhalten sind; zwei andere Kurven wurden mit der anderen Röhre aufgenommen. Die beiden letzteren sind nur zwischen den Spannungen 5 und 8 Volt ermittelt.

In der Fig. 8 ist auch der Strom des Glühdrahtes angegeben, das Potential zwischen R_2 und P und die Dampfspannung p bei der Temperatur, mit der die Kurven aufgenommen wurden. Außerdem fügen wir die Ionisations- und Resonanzspannungen I und R des Wasserstoffs und Sauerstoffs bei[1]).

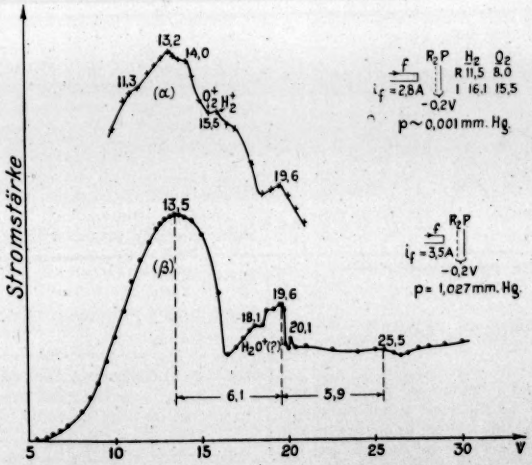


Fig. 7. Anregungspotentiale des Wassermoleküls. An der linken Seite sind: Dampfdruck p, Glühdrahtstrom f, Retardierungspotential zwischen Platte und zweitem Gitter und kritische Potentiale des H_2 und O_2 angegeben.

1) Franck u. Jordan, loc. cit., S. 71. Compton u. Mohler, loc. cit., S. 11.
2) Franck u. Jordan, loc. cit., S. 256 u. 274.

Diskussion. Bei der Kurve α fallen zwei Stellen besonders auf. Eine entspricht einer Spannung von 13,2 Volt und die andere einer solchen von 19,6 Volt (Unterschied: 6,4 Volt). Diese beiden Werte können nicht den kritischen Potentialen des Wasserstoffs oder Sauerstoffs entsprechen, die ebenfalls im Verlauf der Kurve angegeben sind. Außerdem erscheinen in der Kurve, allerdings nicht getrennt, zweifellos die Ionisationspotentiale des Wasser- und Sauerstoffs und das Resonanzpotential des Wasserstoffs, die wegen der Dissoziation des Wassers bei den hohen Temperaturen des Glühfadens vorhanden sein müssen.

Das Auftreten der kritischen Potentiale des Wasser- und Sauerstoffs dient dazu, die gegebenen Werte zu korrigieren, und wir leiten ab, daß der Gesamtfehler 0,1 bis 0,2 Volt nicht überschreitet. Daher können wir die aus der Kurve abgelesenen Werte als die richtigen annehmen.

In der Kurve β erscheinen die folgenden Potentiale in ausgezeichneter Form: 13,5, 19,6 und 25,5 Volt. Die entsprechenden Differenzen sind 6,1 und 5,9 Volt, was zu der Annahme berechtigt, daß ein um 6 Volt betragendes Potential vorhanden ist. Dieser Wert erscheint tatsächlich

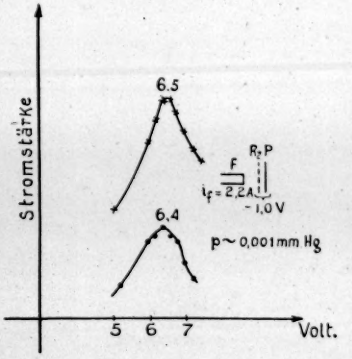


Fig. 8. Das niedrigste von uns gefundene Potential des Wassermoleküls (Resonanzpotential?).

in einigen Kurven, allerdings mit geringer Klarheit. Um diese Erscheinung näher zu untersuchen, haben wir eine weitere Röhre gebaut mit einem noch größeren Felde zwischen R_1 und R_2. Wie aus der Fig. 8 erhellt, befindet sich tatsächlich ein kritisches Potential bei 6,4 Volt.

Aus diesem Grunde und demjenigen, daß wir nie ein kritisches Potential unterhalb 6 Volt erhalten haben, glauben wir, daß bei 6,2 Volt (als Mittelwert) das Resonanzpotential des Wassers liegt.

Was den Wert von 13,2 Volt anbelangt, der mit den Werten von Mackay, Foote und Mohler übereinstimmt, so scheint er nicht einem Ionisationspotential des Wassers zu entsprechen, denn in diesem Falle hätte er bei unseren ersten Versuchen unterhalb von 18 Volt erscheinen müssen, da das geringere Potential naturgemäß zuerst erscheint. Wenn diese unsere Denkweise richtig ist, muß dieses Potential einer Anregung des Wassermoleküls entsprechen.

Wenn schließlich das Resonanzpotential des Wassers 6,2 Volt $\pm$ 0,2 ist, so müßte die erste Linie des Linienspektrums des Wassers nach der Gleichung $e \cdot V = h \cdot \nu$ die Wellenlänge $\lambda_r =$ 1991 Å.E. $\pm$ 95 haben. Die der Grenze der fraglichen Serie entsprechende Wellenlängenzahl wäre bei $\lambda_i = 686$ Å.E. $\pm$ 20 zu suchen.

Wir möchten auch an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. R. Loyarte unseren besten Dank aussprechen, sowohl für die Anregung zu dieser Arbeit, als auch für die stets bereitwillige Unterstützung.

Zusammenfassung.

a) Wir haben vermittelst der Lenardschen Versuchsmethode die Ionisationspotentiale der Moleküle H_2O und NH_3 bestimmt, und die Werte als 18,0 Volt $\pm$ 0,5 und 16,1 Volt $\pm$ 0,5 gefunden.

b) Diese Werte sind in guter Übereinstimmung mit denjenigen des Ne und CH_4 und ergeben somit eine Bestätigung für das Grimmsche Gesetz, wonach N_2O, NH_3 und CH_4 Pseudo-Atome des Ne sind.

c) Vermittelst der Methode von Franck und Hertz haben wir folgende Anregungspotentiale des Wassers gefunden: 6,4, 19,6, 25,5 und vielleicht auch 14,0 und 20,1 Volt. Wir vermuten, daß 6,4 das Resonanzpotential des Wassermoleküls ist.

La Plata, Instituto de Física de la Universidad, September 1929.

(Eingegangen 29. Oktober 1929.)

Thermodynamische Wärmeleitungstheorie.

Von Witold Jazyna (Jacyno).

Einleitung.

Erster Teil (Allgemeines).

I. Thermodynamische Hauptsätze.
1. Der erste Hauptsatz.
2. Der zweite Hauptsatz.

II. Thermodynamische Wärmestromgleichungen.
1. Die allgemeine Form der Wärmestromgleichung.
2. Umformung der Wärmestromgleichung.
3. Physikalische Bedeutung der Fundamentalglieder.
4. Zusammenhang mit den thermodynamischen Größen.

Zweiter Teil (Anwendungen).

I. Anwendung auf umkehrbare Prozesse.
1. Physikalische Umkehrbarkeitsgebiete.
2. Umkehrbarkeitsbedingungen für wirkliche Körper.
3. Besondere Fälle der umkehrbaren Prozesse (adiabatischer, isothermischer, isodynamischer und isochorischer Prozeß).

II. Anwendung auf nicht umkehrbare Prozesse.
1. Isothermische und adiabatische Prozesse.
2. Der Irreversibilitätsgrad.
3. Der Irreversibilitätsgrad bei Gasprozessen (Beispiel).
4. Nicht umkehrbare „Kreisprozesse". Schluß (Der verallgemeinerte Erhaltungssatz).

Einleitung.

Die von M. Fourier (1822) entwickelte Theorie der Wärmeleitung ist auf den materiellen Vorstellungen über die Natur der Wärme aufgebaut. Die Möglichkeit der gegenseitigen Verwandlung

Wärme ⇄ Arbeit

wurde bei dieser Theorie nicht berücksichtigt, was auch dadurch entscheidend ist, daß die spezifische Wärme und äußere bzw. innere Leitfähigkeiten in dieser Theorie stets als konstant betrachtet sind. Seit R. Meyer (1842), H. von Helmholtz (1848), R. Clausius (1850) und L. Boltzmann (1868) entwickeln sich die gegenwärtigen mechanischen bzw. kinetischen Vorstellungen über die Natur der Wärme.

A. Einstein (1911), Louis de Broglie (1923) und Erwin Schrödinger (1926) haben die energetische Konzeption auch auf die Materie erstreckt.

Auch von dem Standpunkt der neuen reellen Thermodynamik, die neben dem Nernstschen (1906) noch das reziproke Theorem[1]) einschließt, kann man die Materie von der Energie als abhängig ansehen. Falls wir uns nicht mit der dualistischen Weltanschauung begnügen wollen[1]), so müssen wir die folgende Frage stellen. Ist nun die Energie materiell oder Materie energetisch?

Für die Hauptsätze der Thermodynamik als allgemeine Prinzipien sind die beiden Möglichkeiten gleichwertig, nur die Maßsysteme und die entsprechenden äußeren mathematischen Formen können sich in beiden Fällen etwas unterscheiden.

Im folgenden werden einige Formen der beiden Hauptsätze in Verbindung mit den energetischen Vorstellungen der Materie erläutert, in Zusammenhang mit der Fourierschen Theorie der Wärmeleitung gebracht und zur Lösung einiger allgemeiner Umkehrbarkeits- bzw. Irreversibilitätsprobleme angewandt.

Erster Teil.

I. Thermodynamische Hauptsätze.

1. Der erste Hauptsatz. Schon die in den früheren Mitteilungen[2]) benutzten Formen der thermodynamischen Hauptsätze fassen nicht ausschließlich die umkehrbaren Prozesse auf.

Bezeichnen wir bei einem Prozeß, der im allgemeinen unter Dissoziation und Reibung stattfindet, den elementaren Aufwand der Wärme

$$\begin{aligned} \triangle Q = c_x dT &= dU + A \boldsymbol{\Sigma} \triangle W \\ &= [c_s + (c_x - c_\mu)]\, dT \\ &+ A\,[p_i\, dV + \boldsymbol{\Sigma} \triangle W], \end{aligned} \tag{1}$$

der dem Arbeitskörper ohne Verluste von der äußeren Wärmequelle zugeführt ist, als äußeren thermodynamischen Wärmeaufwand, wo

$$\begin{aligned} dU &= [c_s dT + A n p_i dV] + (c_x - c_\mu)\, dT \\ &= dU^m + dU^i = dU^T + dU^v, \end{aligned} \tag{2}$$

U^m die thermodynamische Molekularenergie, U^i die Atomenergie, U^T die innere thermodynamische Energie (vgl. Tabelle 1), d. h. die innere Energie (U), vermindert um die Materiewellenenergie (U^v), und

$$\boldsymbol{\Sigma} \triangle W = p\, dV + \sum \frac{m_i w_i^2}{2}$$

die Gesamtarbeit, d. h. die Summe von der elementaren äußeren Arbeit und inneren Konvektionsstromarbeiten bzw. Reibungsarbeiten bedeuten. Es liegt sehr nahe zu schließen, daß die potentielle Atomenergie hauptsächlich von der Temperatur abhängt. Im allgemeinen

1) Zeitschr. f. Phys. **25**, 133, 1924 u. a., besonders ibid. **37**, 304, 1926.

1) Vgl. z. B. A. Sommerfeld (diese Zeitschr. **30**, 8. 6, 1929, Vortrag).

2) Zeitschr. f. Phys. **57**, 341; **58**, 429 und 436, 1929.

aber sind U^i und U^m keine Zustandsfunktionen und als solche darf man nur U, U^T und U^r betrachten, falls das Äquivalenzprinzip allgemeine Gültigkeit besitzt. Bei Störungen des Materiewellenzustandes können die Umwandlungen

$$\text{Materie} \rightleftarrows \text{Energie}$$

nicht notwendig mit Begleitung der Reibungsprozesse auftreten, infolgedessen können diese Prozesse auch umkehrbar vorgehen.

Tritt nun der Reibungsprozeß infolge von endlichen Temperatur- bzw. Druckdifferenzen ein, so entsteht im Innern der Körper die Reibungswärme $\triangle Q^r$ und somit ist der resultierende thermodynamische Wärmeaufwand gleich der Summe

$$\triangle Q + \triangle Q^r.$$

Bei der Formulierung und Anwendung des zweiten Hauptsatzes spielt der resultierende Wärmeaufwand eine ähnliche Rolle wie der gesamte thermodynamische beim ersten Hauptsatz (a. a. O.). Wollen wir im einzeln die wirklichen (augenblicklichen) Übergangszustände betrachten, so dürfen wir das Arbeitsglied, das die innere molare Bewegungsenergie (Konvektion, Vibration usw.) darstellt, nicht als in die innere thermodynamische Energie umwandelbar betrachten, sondern als Teil der Gesamtarbeit beibehalten.

Mit Beendigung des Prozesses geht die molare Bewegungsenergie hauptsächlich in die molekulare Wärmebewegung („Wärme") allmählich über und auf Kosten der inneren Teile der Gesamtarbeit wird die innere thermodynamische Energie um den äquivalenten Betrag vergrößert. Schließlich ist es möglich, für alle Prozesse sowohl für umkehrbare wie auch für nicht umkehrbare stets die Formel

$$\left.\begin{aligned} \triangle Q &= dU + A\,\Sigma\,\triangle W \\ \text{bzw.} \quad Q_{1-2} &= U_2 - U_1 + AW_{1-2} \end{aligned}\right| \qquad (3)$$

des ersten Hauptsatzes beizubehalten, wobei stets Q_{1-2} der äußere thermodynamische Wärmeaufwand und U die innere Energie

$$U = U^T + U^r$$

bedeuten. Nur der physikalische Inhalt des letzten Fundamentalgliedes $\Sigma\triangle W$ bzw. W_{1-2} muß in jedem besonderen Fall im einzelnen bestimmt werden. Der Umstand bedeutet nämlich einen wichtigen Vorteil, den die Clausiussche Form des ersten Hauptsatzes aufweist, und zwar bei Anwendungen mit großer Allgemeinheit der Problemstellung.

2. Der zweite Hauptsatz. Etwas anderes ist es mit dem zweiten Hauptsatz, dessen einfache Clausiussche Form nur durch die Ungleichung darstellbar ist. Dies ist schon deshalb verständlich, weil im allgemeinen beim nicht umkehrbaren Prozeß fast alle Zustandsparameter für den Körper selbst Bestimmtheit verlieren und in jedem besonderen Fall ist eine spezielle theoretische bzw. experimentelle Bestimmungsmethode nötig. Es ist aber möglich, auch bei nicht umkehrbaren Prozessen den zweiten Hauptsatz in Form einer Gleichung auszudrücken[1]). Mit Hilfe der schon erwähnten Begriffe kann man dazu in folgender Weise gelangen. Bezeichnen wir mit T_i die augenblickliche (örtliche) Temperatur für die Massenteilchen m_i der Körper. Falls für den Körper im Ganzen die Gleichung

$$\frac{\triangle Q + \triangle Q^r}{\sum \frac{m_i(\triangle Q + \triangle Q^r)}{T_i}} = \frac{\triangle Q}{\sum \frac{m_i \triangle Q}{T_i}} = \frac{\triangle Q^r}{\sum \frac{m_i \triangle Q^r}{T_i}} = T \qquad (4)$$

erfüllt ist, bezeichnen wir die betrachtete Zustandsänderung als gleichmäßig irreversiblen Prozeß[2]). Die Bedingungen (4) der gleichmäßigen Irreversibilität bestimmen eine mittlere Temperatur der Körper T und somit, falls wir

$$\left.\begin{aligned} dS^a &= \sum \frac{m_i \triangle Q}{T_i} \\ \text{und} \quad dS^r &= \sum \frac{m_i \triangle Q^r}{T_i} \end{aligned}\right| \qquad (5)$$

bzw. die äußere und innere elementare Entropieänderung nennen, erhalten wir für die gesamte Entropieänderung dS

$$dS = dS^a + dS^r$$

oder, wegen (4),

$$dS = \frac{\triangle Q + \triangle Q^r}{T}. \qquad (6)$$

Die Gleichung (6), in der $\triangle Q$ der äußere thermodynamische Wärmeaufwand und $\triangle Q^r$ die innere Reibungswärme bedeuten, stellt die differentiale Form des zweiten Hauptsatzes für den betrach-

1) In dieser Richtung sind die Versuche von de Donder, Kolossowski u. a. gemacht, sie weichen aber von der hier behandelten Darstellung im wesentlichen deutlich ab. [Vgl. N. A. Kolossowsky, Zeitschr. d. Phys.-Chem. Gesellsch. **60**, 1071, 1928 (7), russisch.]

2) Es ist wohl verständlich, daß die Bedingungen (4) für umkehrbare Prozesse zur Gleichheit

$$T = T_i$$

mit Notwendigkeit führen.

teten Fall des gleichmäßig irreversiblen Prozesses dar[1]).

Somit ist die elementare Änderung der Entropie der Körper dem Verhältnis von dem resultierenden thermodynamischen Wärmeaufwande und der absoluten mittleren Temperatur gleich, gleichgültig, ob es sich um reversible oder irreversible Prozesse handelt, nur mit dem Unterschied, daß im letzten Falle entweder die experimentelle oder rechnerische Bestimmung der mittleren Temperatur noch übrig bleibt. Diese Auffassung der beiden Hauptsätze kann mit der wellentheoretischen Vorstellung über Materie und Energie in keinem Widerspruch stehen.

II. Thermodynamische Wärmestromgleichungen.

1. Die allgemeine Form der Wärmestromgleichung. Unter Berücksichtigung der Fourierschen Theorie der Wärmeleitung[2]) haben wir[3])

$$\int_1^2 c_s d\bar{T} = \int_1^2 K \nabla^2 T \, dx\, dy\, dz\, d\tau, \qquad (7)$$

wobei $d\tau$ und K bzw. das Zeitelement und den Leitfähigkeitskoeffizienten der Körper bezeichnen,

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \qquad (8)$$

der Differentialparameter zweiter Ordnung, T die Temperatur der Körperteilchen (früher durch T_i bezeichnet) und

$$c_s = c_x - (c_x - c_\mu) - A\left(np_i + \frac{\Sigma \triangle W}{\triangle T}\right) \qquad (9)$$

die absolute spezifische Wärme ist, welche nur von dem Molekulargewichte m der Körper abhängt[1]), d. h.

$$c_s = f(m).$$

Differenziert man die Gleichung (7) nach τ, so erhält man:

$$\frac{d}{d\tau}\int_1^2 c_s d\bar{T} = \int_1^2 K \nabla^2 T \, dV_i, \qquad (10)$$

wobei $dV_i = dx\, dy\, dz$ das Volumenelement bedeutet.

Setzen wir zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x}\cdot K &= X \\ \frac{\partial T}{\partial y}\cdot K &= Y \\ \frac{\partial T}{\partial z}\cdot K &= Z \end{aligned}\right| \qquad (11)$$

so folgt

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x} &= K\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial K}{\partial x} \\ \frac{\partial Y}{\partial y} &= K\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial K}{\partial y} \\ \frac{\partial Z}{\partial z} &= K\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial K}{\partial z} \end{aligned}\right| \qquad (11')$$

und somit aus (10), mit Rücksicht auf (8),

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\int_1^2 c_s d\bar{T} &= \int_1^2 \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dV_i \\ &- \int_1^2 \left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial K}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial K}{\partial z}\right) dV_i. \end{aligned} \qquad (12)$$

2. Umformung der Wärmestromgleichung. Das erste Volumenintegral

$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dV_i$$

auf der rechten Seite der Gleichung (12) kann man nach der Green-Gaussschen Umbildungsmethode durch ein Oberflächenintegral

$$\int (AX + BY + CZ) d\omega$$

darstellen, wobei A, B, C die Richtungs-Cos

---

1) Der Übergang zu der Clausiusschen Form ist leicht durchführbar. Bezeichnen wir die Temperatur der Wärmequelle mit T, so haben wir zuerst

$$dS > \frac{\triangle Q}{T},$$

weil stets

$$\frac{\triangle Q'}{T} > 0$$

ist, und weiter à fortiori

$$dS > \frac{\triangle Q}{T},$$

was unabhängig von dem Verhältnis zwischen der Temperatur T und $\bar{T}$ gilt. In der Tat, auf Grund des Clausiusschen Postulats folgt, daß, wenn $T > \bar{T}$ ist, gleichzeitig $\Delta Q > 0$ sein muß, d. h. in diesem Falle ist der thermodynamische Wärmeaufwand positiv, falls aber $T < \bar{T}$ ist, so haben wir auch $\Delta Q < 0$, und dieser Wärmeaufwand erscheint negativ. Daraus ergeben sich ohne weiteres die üblichen Clausiusschen Formen des zweiten Hauptsatzes, nämlich

$$\triangle Q < T\, dS \quad \text{und} \quad \int \frac{\triangle Q}{T} < 0.$$

2) M. Fourier, Théorie analytique de la chaleur. Paris, 1822 (Didots Aufl.). Äußerst kurze Darstellung der Fourierschen Hauptidee siehe E. Mach, Die Prinzipien der Wärmelehre, Leipzig, 1900 (J. A. Barth 2. Aufl.).

3) Im folgenden werden die vielfachen Integrale zur Abkürzung der Schreibweise durch einfache ersetzt.

1) Zeitschr. f. Phys. 67, 341, 1929.

und $d\omega$ das Oberflächenelement bezeichnen. Mit Rücksicht auf (11) haben wir weiter

$$AX+BY+CZ=K\left(A\frac{\partial T}{\partial x}+B\frac{\partial T}{\partial y}+C\frac{\partial T}{\partial z}\right)=K\frac{dT}{dn}, \tag{13}$$

wo n die innere Normale zur Oberfläche der Körper bedeutet.

Das zweite Glied

$$\int\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial K}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial K}{\partial y}+\frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial K}{\partial z}\right)dV_i$$

der rechten Seite der Gleichung (12) läßt sich mit Hilfe der folgenden Überlegungen umbilden.

Schneiden wir den Körper mit Hilfe der unendlich vielen zueinander unendlich nahe liegenden isoparametrischen Flächen, deren orthogonalen Abstand wir durch η bezeichnen. Dann können wir schreiben

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial K}{\partial x}&=\frac{\partial T}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial K}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\\ \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial K}{\partial y}&=\frac{\partial T}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial K}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\\ \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial K}{\partial z}&=\frac{\partial T}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial K}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2\end{aligned}\right| \tag{14}$$

und folglich

$$\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial K}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial K}{\partial y}+\frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial K}{\partial z}=\frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{\partial K}{\partial \eta}, \tag{15}$$

weil die Summe der Quadrate der Richtungs-Sec

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2=D$$

bezeichnet ist und η unter dem Integralzeichen nicht explizite eingeht, d. h. keine Änderung des Koordinatensystems auftritt. Die Größe

$$D\frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{\partial K_i}{\partial \eta}=l_i \tag{15'}$$

stellt die in der Volumeneinheit pro Zeiteinheit infolge der inneren Leitfähigkeitsänderung entstandene Wärmemenge dar.

Also aus (12) folgt:

$$\frac{d}{d\tau}\int_1^2 c_x d\bar{T}=-\int_1^2 K_a\frac{dT}{dn}d\omega-\int_1^2 D\frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{\partial K_i}{\partial \eta}dV_i, \tag{16}$$

oder, mit Rücksicht auf (9) und (15′)

$$\frac{d}{d\tau}\int_1^2\left[c_x-c_r-A\left(np_i\frac{dV}{d\bar{T}}+\frac{\Sigma\triangle W}{\triangle\bar{T}}\right)\right]d\bar{T} \tag{16'}$$
$$=-\int_1^2 K_a\frac{dT}{dn}d\omega-\int_1^2 l_i dV_i,$$

wobei $c_x-c_\mu=c_x$ die innere relative spezifische Wärme ist, oder auch

$$\frac{d}{d\tau}\int_1^2 c_x d\bar{T}-\frac{d}{d\tau}\int_1^2[c_r d\bar{T}+A(np_i dV+\Sigma\triangle W)]=\frac{d}{d\tau}\int_1^2 c_i d\bar{T}, \tag{17}$$

wobei K_a der äußere Leitfähigkeitskoeffizient bedeutet.

3. Physikalische Bedeutung der Fundamentalglieder. Jedes der beiden Glieder

$$\frac{d}{d\tau}\int_1^2 c_x d\bar{T}\quad\text{bzw.}\quad -\int_1^2 K_a\frac{dT}{dn}d\omega$$

drückt den äußeren Wärmestrom durch die ganze Oberfläche des Körpers in der Zeiteinheit $\frac{\triangle Q}{\triangle\tau}$, oder die äußere Wärmestromstärke aus, d. h.

$$-\int_1^2 K_a\frac{dT}{dn}d\omega=\frac{d}{d\tau}\int_1^2 c_x d\bar{T}=\frac{\triangle Q}{\triangle\tau}. \tag{18}$$

Das zweite Glied auf der rechten Seite der Gleichung (16)

$$\int_1^2 D\frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{\partial K_i}{\partial \eta}dV_i=\int_1^2 l_i dV_i$$

stellt die innere Wärmestromstärke dar, welche man als Ursache der Änderung des inneren Leitfähigkeitskoeffizienten K_i der Körper betrachten kann und anderseits läßt sich mit Hilfe von deren Änderung dieser Strom selbst beschreiben, somit

$$\int_1^2 D\frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{\partial K_i}{\partial \eta}dV_i=\frac{d}{d\tau}\int_1^2[c_r d\bar{T}+A(np_i dV+\Sigma\triangle W)]=\frac{dU^i}{d\tau}+\frac{A\triangle\Omega}{\triangle\tau}. \tag{19}$$

Dabei stellen $\frac{dU^i}{d\tau}$ und $\frac{A\triangle\Omega}{\triangle\tau}$ bzw. die Änderungen der Atomenergie und die Summe von innerer potenzieller Energie und äußerer Gesamtarbeit dar.

4. Zusammenhang mit den thermodynamischen Größen. Nennen wir noch $\frac{dI}{d\tau}$ die gesamte Wärmestromstärke, d. h. die Stärke des Fourierschen Wärmestromes

$$\frac{d}{d\tau}\int_1^2 c_i d\bar{T}=\frac{dI}{d\tau}, \tag{20}$$

so erhalten wir aus (16), (18) und (19)

$$\frac{dI}{d\tau} = \frac{\triangle Q}{d\tau} - \frac{dU^i}{d\tau} - \frac{A \triangle \Omega}{\triangle \tau}, \tag{21}$$

oder

$$dI = \triangle Q - dU^i - A \triangle \Omega, \tag{22}$$

oder auch, wegen

$$\triangle \Omega = \Sigma \triangle W + n p_i dV$$

und aus (3)

$$\triangle Q - A \Sigma \triangle W = dU,$$

erhalten wir schließlich

$$\left.\begin{aligned} dI &= d(U - U^i) - A n p_i dV \\ \text{oder} \quad dI &= dU^m - A n p_i dV, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

wobei

$$U^m = U - U^i$$

die thermodynamische Molekularenergie bedeutet. Also der gesamte Wärmestrom ist der Differenz zwischen der Änderung der „molekularen" thermodynamischen Energie U^m und inneren Arbeit (potenziellen Energie) gleich.

Aus der Gleichung (17) geht ohne weiteres hervor, daß der Fouriersche Wärmestrom nur dann mit dem äußeren identisch ist, d. h.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{d\tau}\int_1^2 c_i dT = \frac{d}{d\tau}\int_1^2 c_x d\overline{T} \\ \text{oder} \quad &d\zeta = \triangle Q \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

ist, falls der innere Wärmestrom verschwindet, d. h.

$$\int_1^2 I_i dV_i = 0,$$

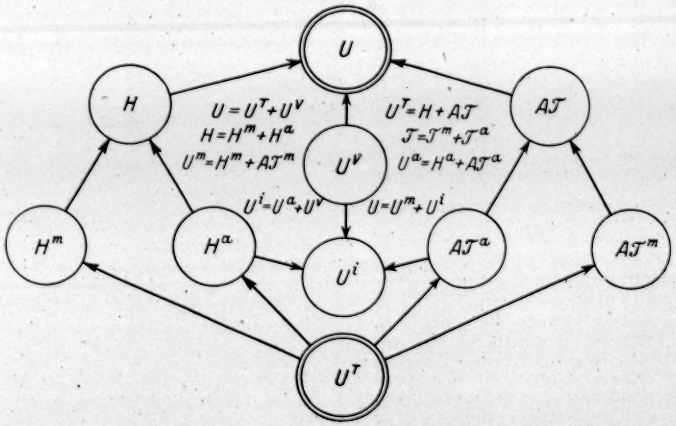
oder

$$c_x d\overline{T} + A(n p_i dV + \Sigma \triangle W) = 0$$

ist, was wirklich für feste Körper wenigstens in erster Annäherung zutrifft.

Die Gleichungen (16), (16'), (18) und (23) bestimmen alle möglichen thermomechanischen Änderungen der Körper bei gleichmäßig irreversiblen Vorgängen einschließlich der Wärmeleitungsprozesse und lassen viele Anwendungen zu.

Schematische Tabelle für innere Energie.



U innere Energie
U^T innere thermodynamische Energie.
U^V die Materiewellenenergie.
U^i die Atomenergie.

H innere potentielle Energie.
H^m molekulare potentielle Energie. (potentielle Molekularenergie)
H^a atomare potentielle Energie. (potentielle Atomenergie)
T innere kinetische Energie.

U^a thermodynamische Atomenergie; T^m molekulare kinetische Energie; U^m thermod. Molekularenergie (kinetische Molekularenergie)
T^a atomare kinetische Energie. (kinetische Atomenergie)

Zweiter Teil.

I. Anwendung auf umkehrbare Prozesse.

1. Physikalische Umkehrbarkeitsgebiete. Wenden wir nun die früher erhaltenen Gleichungen

$$\int_1^2 c_s\, d\bar{T} = \int_1^2 K \nabla^2 T\, dV_i\, d\tau, \tag{7}$$

$$\frac{dI}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\int_1^2 c_s\, d\bar{T} = -\int_1^2 K_a \frac{dT}{dn}\, d\omega - \int_1^2 D \frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{\partial K_i}{\partial \eta}\, dV_i, \tag{16}$$

$$\frac{d}{d\tau}\int_1^2 c_x\, d\bar{T} = -\int_1^2 K_a \frac{dT}{dn}\, d\omega, \tag{18}$$

$$\frac{d}{d\tau}\int_1^2 [c_v\, d\bar{T} + A(n p_i\, dV + \Sigma \triangle W)] = \int_1^2 l_i\, dV_i \tag{19}$$

und

$$dI = d(U - U^i) - A n p_i\, dV = dU^m - A n p_i\, dV \tag{23}$$

zuerst auf umkehrbare Prozesse an. Bei diesen Prozessen, als Gleichgewichtsprozessen, muß notwendig

$$\nabla^2 T = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma \triangle W = p\, dV$$

sein. Also aus (7) geht hervor, daß drei Fälle möglich sind, damit der absolute Wärmeaufwand

$$\int_1^2 c_s\, d\bar{T}$$

nicht gegen Null konvergiert:

a) $K = \infty$ Körper mit unendlich großer Leitfähigkeit (physikalische Fiktion),
b) $V = \infty$ Körper im Zustande des permanenten Gleichgewichtes,
c) $\tau = \infty$ Körper bei unendlicher Wirkungszeitdauer (Gebiet der wirklichen Körper).

Bei den üblich betrachteten Fällen erhält nur das Gebiet c) die praktisch wichtige Rolle, obwohl auch die Fälle a) und b) bei thermodynamischer Beschreibung der Körperzustände nicht ohne Bedeutung sind.

2. Umkehrbarkeitsbedingungen für wirkliche Körper. Betrachten wir den Fall c), so erhalten wir aus (16), (18), (19) und (23)[1])

$$\frac{dI}{d\tau} \cong 0,$$

$$\int_1^2 K_a \frac{dT}{dn}\, d\omega \cong 0, \tag{25}$$

$$\int_1^2 D \frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{\partial K_i}{\partial \eta}\, dV_i \cong 0 \tag{26}$$

und

$$dI \neq 0,$$

d. h. die innere, äußere und folglich auch die gesamte Stromstärke müssen unendlich klein oder Null sein, der Gesamtstrom dagegen kann von Null verschiedene Werte annehmen, weil hier die Wirkungszeitdauer unendlich groß sein kann.

Die Gleichungen (25) und (26) stellen nämlich für den betrachteten Fall die gesuchten Umkehrbarkeitsbedingungen dar. Aus der Gleichung (25) und (26) folgt weiter

$$K_a \frac{dT}{dn} \cong 0$$

und

$$\frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{\partial K_i}{\partial \eta} \cong 0.$$

Da im allgemeinen der äußere Leitfähigkeitskoeffizient K_a nicht unendlich klein ist, so muß notwendig

$$\frac{dT}{dn} \cong 0 \tag{25'}$$

und ebenfalls

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} \cong 0, \tag{26'}$$

weil D keineswegs gleich Null werden kann und im allgemeinen die innere Leitfähigkeit bei willkürlicher Wahl der isoparametrischen Fläche wohl von Fläche zu Fläche sich ändern kann.

Die Gleichungen (25') und (26') drücken die bekannte Hauptbedingung der Umkehrbarkeit aus

$$T \cong \bar{T}, \tag{27}$$

welche bei der üblichen Betrachtungsweise sich aus den Bedingungen des thermodynamischen Gleichgewichtes ergibt.

3. Besondere Fälle der umkehrbaren Prozesse. a) Adiabatischer Prozeß. Es wird im folgenden dieser Prozeß mit Hilfe der Bedingung

$$\triangle Q = 0 \quad \text{bzw.} \quad c_x = 0 \tag{28}$$

[1]) Im folgenden wird mit Hilfe $\cong$ stets die Bedingung: „gleich Null bezw. unendlich klein" bezeichnet.

bestimmt, somit aus (18)

$$\int_1^2 K_a \frac{dT}{dn} d\omega = 0 \qquad (29)$$

und folglich aus (16)

$$\frac{dI}{d\tau} = -\int_1^2 l_i dV_i, \qquad (30)$$

d. h. der äußere Wärmestrom ist streng gleich Null, deshalb besteht der Fouriersche Strom bloß aus dem inneren Wärmestrome (19), welcher auf Kosten der Atomenergie, molekularen potentiellen Energie und besonders äußeren Arbeit entsteht. Die Gleichung (29) wird nur dann streng erfüllt, falls entweder die äußere Leitfähigkeit gleich Null wäre

$$K_a = 0, \qquad (31)$$

d. h. der Körper wird mit Hilfe einer „adiabatischen" Hülle nach außen isoliert, oder die Wirkungszeitdauer konvergiert gegen Null, d. h.

$$\tau_2 - \tau_1 = 0, \qquad (32)$$

welcher Schluß aus der Gleichung (18) unter Bedingung $c_x = 0$ leicht ableitbar ist. Die erhaltene Folgerung, die für nichtumkehrbare adiabatische Prozesse eine besondere Bedeutung erhält, ist für diese Theorie charakteristisch und aus der reinen Thermodynamik nicht ableitbar (a. a. O. I, II, Ende).

b) Isothermischer Prozeß. Wir haben stets

$$T = \bar{T} = \text{const, bzw. } dT = d\bar{T} = 0, \qquad (33)$$

dagegen

$$c_x = \infty.$$

Also aus (16) wegen $c_x \neq \infty$ ergibt sich

$$\frac{dI}{d\tau} = 0$$

und folglich

$$\int_1^2 K_a \frac{dT}{dn} d\omega = -\int_1^2 D \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{dK_i}{\partial \eta} dV_i, \qquad (34)$$

d. h. die inneren und äußeren Ströme sind dem absoluten Betrage nach einander gleich, aber entgegengerichtet. Aus der Gleichung (19) folgt, mit Rücksicht auf (24),

$$\int_1^2 D \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial K_i}{\partial \eta} dV_i = \frac{d}{d\tau} \int_1^2 A (np_i + \bar{p}) dV, \qquad (35)$$

weil im allgemeinen $c_x \neq \infty$ ist. Damit ist es möglich beim isothermischen Prozeß den Mechanismus der Verwandlung sich so vorzustellen, daß infolge der Änderung der äußeren mechanischen Bedingungen zuerst der innere Wärmestrom entsteht und danach infolge dieses Stromes der äußere Wärmestrom erscheint. Endlich erhalten wir aus (23), wegen $dI = 0$, auch

$$dU^m = A n p_i dV + dI,$$

oder nach Addition von dU^i auf beiden Seiten

$$dU = A n p_i dV + dI + dU^i.$$

Differenziert nach V bei $T = \text{const.}$, so wird

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial I}{\partial V}\right)_T + \left(\frac{\partial U^i}{\partial V}\right)_T + A n p_i,$$

wobei

$$A n p_i = \Gamma$$

und [1])

$$\left(\frac{\partial I}{\partial V}\right)_T + \left(\frac{\partial U^i}{\partial V}\right)_T = C(\Gamma) \qquad (36)$$

oder auch mit Rücksicht auf (22)

$$C(\Gamma) = l_T - A(np_i + \bar{p}).$$

Für Körper mit $C_v = f(T)$ muß

$$\left(\frac{\partial I}{\partial V}\right)_T = -\left(\frac{\partial U^i}{\partial V}\right)_T$$ [2])

und auf Grund des reziproken Theorems[3]) ebenfalls

$$\bar{p}_i = 0$$

sein, was wenigstens für Wasserdampf reiche Bestätigungen findet.

c) Isodynamischer Prozeß. Im betrachteten Fall haben wir

$$dU = 0 \quad \text{bzw.} \quad dU^m = -dU^i$$

und somit aus (23) im allgemeinen

$$dI = -dU^i - A n p_i dV. \qquad (37)$$

Nur in dem Fall, daß auch

$$dU^i = 0 \quad \text{bzw.} \quad dU^m = 0,$$

erfolgt die Änderung der inneren potentiellen Energie nur auf Kosten des Fourierschen Wärmestromes („Reststromes"). Der qualitative Unterschied zwischen kondensierten Zuständen und Gasen mit verschwindend kleinem Reststrome kann quantitativ durch die Größe dieses Stromes beim isodynamischen Prozeß gekennzeichnet werden.

---

1) A. a. O. vgl. Zeitschr. f. Phys. **30**, 376, 1924.
2) Falls im allgemeinen vorausgesetzt ist, daß U^i nicht nur von der Temperatur allein abhängt, sondern noch z. B. vom Volumen u. dgl.
3) l. c.

d) Isochorischer Prozeß. Aus den Gleichungen (17), (18), (19) und (23) erhält man bzw.

$$\frac{d}{d\tau}\int_1^2 c_v d\bar{T} - \frac{d}{d\tau}\int_1^2 c_r d\bar{T} = \frac{d}{d\tau}\int_1^2 c_i d\bar{T}, \quad (38)$$

$$\frac{d}{d\tau}\int_1^2 c_v d\bar{T} = -\int_1^2 K_a \frac{dT}{dn} d\omega, \quad (39)$$

$$\frac{d}{d\tau}\int_1^2 c_r d\bar{T} = \int_1^2 l_i dV_i \quad (40)$$

und

$$dl = dU^m, \quad (41)$$

d. h. die Fouriersche Wärmestromänderung bei konstantem Volumen ist der Änderung der thermodynamischen Molekularenergie gleich und nur unter der Bedingung

$$c_r = 0 \text{ bzw. } dU^i = 0$$

mit der äußeren Stromänderung identisch.

II. Anwendung auf nicht umkehrbare Prozesse.

1. Isothermische und adiabatische Prozesse. Bei irreversiblen Zustandsänderungen ist

$$\nabla^2 T \neq 0 \text{ und } \sum \triangle W \neq p dv,$$

also kann der absolute Wärmeaufwand auch bei endlicher Wirkungszeitdauer

$$\tau = \tau_2 - \tau_1$$

keine Nullwerte annehmen.

Im allgemeinen haben wir bei diesen Prozessen

$$K_a \frac{dT}{dn} \neq 0$$

und

$$\frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{\partial K_i}{\partial \eta} \neq 0,$$

weil man die Temperatur der Körper in dem Fall weder nach Ort noch nach Zeit als konstant ansehen kann.

Der „isothermische" irreversible Prozeß kann streng genommen nur im Mittel nach der Zeit nicht aber nach dem Ort wirklich isotherm sein, weil die mit der Wärmequelle im unmittelbaren Wärmeaustausch befindlichen Körperteilchen notwendig eine von den übrigen fernerliegenden bedeutend verschiedene Temperatur haben.

Somit sind überhaupt die äußere ja auch die innere Wärmestromstärke nicht gleich Null, d. h.

$$\int_1^2 K_a \frac{dT}{dn} d\omega \neq 0$$

und

$$\int_1^2 l_i dV_i \neq 0.$$

Der innere Wärmestrom verschwindet nur in dem besonderen Fall, daß die innere Leitfähigkeit als unveränderlich angesehen werden kann, d. h. falls

$$\frac{\partial K_i}{\partial \eta} = 0 \quad (42)$$

ist.

Bei dem adiabatischen Prozeß dagegen ist der äußere Wärmestrom

$$\int_1^2 K_a \frac{dT}{dn} d\omega = 0 \quad (29)$$

und die innere Reibungswärme dient zur Vergrößerung der inneren Wärmeströme. Die Erfahrung lehrt, daß die Bedingung (29) des reellen adiabatischen Prozesses nur bei sehr kleiner Wirkungszeitdauer erfüllbar ist. Aus der Gleichung

$$\int_1^2 c_x d\bar{T} = \int_1^2 K_a \frac{dT}{dn} d\omega d\tau = 0,$$

wobei

$$\frac{dT}{dn} \neq 0 \quad \text{und} \quad K_a \neq 0$$

sind, geht hervor, daß hier die Integrationsgrenzen τ_1 und τ_2 notwendig der Bedingung

$$\tau_2 - \tau_1 \geqq 0 \quad (43)$$

unterworfen sind, was beim umkehrbaren adiabatischen Prozeß ebenfalls geschehen kann, aber nicht notwendig ist (vgl. 3 [a]). In dem Fall kann man für die Einzelteilchen der Körper den Prozeß als adiabatischen Prozeß betrachten, obgleich die Leitfähigkeit nicht Null ist und zwischen ihnen keine isolierenden Umhüllungen existieren. Das ist der Fall des Schallausbreitungsprozesses in Luft, der von Newton (1700) irrtümlich als isothermischer und bekanntlich erst seit Laplace (1800) als wirklich adiabatischer Prozeß betrachtet wurde. Auf dieser Eigentümlichkeit der rasch verlaufenden Prozesse sind auch die berühmten $\frac{c_p}{c_v}$-Bestimmungen nach der Ausfluß- und Schallgeschwindigkeitsmethode von Clément und Desormes, Röntgen, Laplace, Kundt, Campbell u. a. begründet.

2. Der Irreversibilitätsgrad. Bei nicht umkehrbaren Vorgängen entsteht auf Kosten der äußeren Arbeit die molare Bewegung der Körperteilchen, welche allmählich in die innere

Reibungswärme übergeht. Es können noch die nichtumkehrbaren Änderungen der Atomenergie sowie auch der chemischen Energie hervortreten.

In diesen beiden Fällen kann man den „Irreversibilitätsgrad" des Prozesses mit Rücksicht auf (15′) folgendermaßen ausdrücken

$$\varrho = \frac{\int_1^2 l_i\, dV_i\, d\tau - A\,(np_i + p)\,dV}{\int_1^2 l_i\, dV\, d\tau} = 1 - \frac{A\,(np_i + p)\,dV}{\int_1^2 l_i\, dV_i\, d\tau}, \tag{44}$$

wobei $p\,dV$ die wirkliche äußere Arbeit bedeutet und $dV \neq 0$ ist[1]). Bei Gasen ($np_i = 0$), falls $C_r = 0$ ist, ergibt sich aus (44)

$$\varrho_g = \frac{\Sigma \triangle W - p\,dV}{\Sigma \triangle W} = 1 - \frac{p\,dV}{\Sigma \triangle W}. \tag{45}$$

Aus den Formeln (44) und (45) folgt, daß nur bei Prozessen, welche ohne Verlust von äußerer Arbeit stattfinden, wobei schließlich keine Reibung entsteht, d. h. wo

$$\Sigma \triangle W = p\,dV$$

ist, der Irreversibilitätsgrad verschwinden kann. Falls entweder in (44)

$$A\,(np_i + p)\,dV = 0$$

oder in (45)

$$p\,dV = 0$$

ist, ergibt sich bzw. $\varrho = 1$ oder $\varrho_g = 1$, d. h. der Prozeß ist von vollständiger Irreversibilität begleitet (für Gase z. B. beim Jouleschen Versuche).

3. Der Irreversibilitätsgrad bei Gasprozessen. Nehmen wir an, daß bei Gasen die innere Leitfähigkeit der Konvektionsstromgeschwindigkeit w_i proportional ist, d. h.

$$K_i = a w_i = a \frac{d\eta}{d\tau},$$

wobei $a = f(\tau)$ ist und die Fläche mit gleichen Geschwindigkeiten der Körperteilchen als isoparametrische Fläche vorausgesetzt ist. Man erhält zuerst

$$\frac{\partial K_i}{\partial \eta} = \frac{d\eta}{d\tau}\frac{da}{d\eta} = \frac{da}{d\tau} = f'(\tau) = f'(\eta)\frac{d\eta}{d\tau};$$

also

$$\int_1^2 l_i\, dV_i\, d\tau = \int_1^2 D \frac{\partial T}{\partial \tau} f'(\eta)\, dV_i\, d\tau, \tag{46}$$

wobei

$$D \frac{\partial T}{\partial \tau} f'_\eta(\eta) = l_i$$

die in Volumeneinheit in der Zeiteinheit entstandene Wärmemenge bedeutet. Bei vollständig irreversiblem adiabatischen Prozeß ist diese Größe der Konvektionsenergie

$$A \sum \frac{m_i w_i^2}{2}$$

gleich, und die letztere auf Kosten der nach außen nicht abgegebenen Arbeit

$$c_v (T_1 - T_2) = \frac{AR}{k-1}(T_1 - T_2)$$

erfolgt. Somit ist in dem betrachteten Fall

$$\int_1^2 l_i\, dV_i\, d\tau = c_v (T_1 - T_2). \tag{47}$$

Falls die adiabatische Arbeit (47) teilweise nach

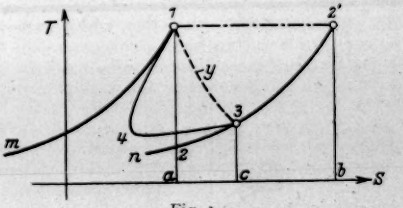


Fig. 1.

außen abgegeben ist, z. B. nach einer Arbeitskurve 1 — 4 — 3 (Fig. 1), erhalten wir den Irreversibilitätsgrad ϱ mit Rücksicht auf (45) aus der Gleichung

$$\varrho = \frac{\text{Fläche } (1-2-3-4-1)}{\text{Fläche } (m-1-2-n)} = \frac{\text{Fl } (a-2-3-c)}{\text{Fl } (a-2-2'-b)}, \tag{48}$$

oder

$$\varrho = \frac{\varrho^{k-y} - 1}{\varrho^{k-1} - 1}, \tag{49}$$

wobei $\varrho = \frac{V_2}{V_1}$ und y der Exponent der „statischen" Polytrope 1—3 bedeuten. Falls der Irreversibilitätsgrad Σ gegeben ist, so kann man

[1]) Hier kann auch, besonders beim isochorischen Prozeß, Diffusion und dgl. die schöne und allgemeine statistische Betrachtungsweise von Smoluchowski eine Anwendung finden. Vgl. dazu Physik. Zeitschr. **17**, 557 und 585, 1916.

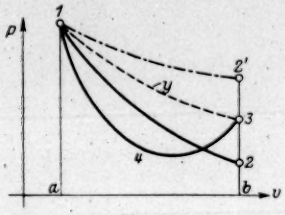


Fig. 2.

aus (49) den Exponent y berechnen, nämlich

$$y = k - \frac{\lg [1 + \varrho (\varrho^{k-1} - 1)]}{\lg \varrho}, \qquad (50)$$

wobei $k = \frac{c_p}{c_v}$ ist.

Die Fläche 1—2—3—4—1 (in der Fig. 2) ist der Differenz zwischen der maximalen und wirklichen adiabatischen Arbeit gleich, d. h.

$$\mathrm{Fl}\,(1-2-3-4-1) = \mathrm{Fl}\,(a-1-2-b) - \mathrm{Fl}\,(a-1-4-3-b);$$

somit muß auch in der Gleichung (48) die Fläche (1—2—3—4—1) als algebraische Summe der positiven und negativen Flächenelemente betrachtet werden. Auf Grund des Erhaltungssatzes, falls wir annehmen, daß

$$c_r = 0$$

ist, muß notwendig (Fig. 1)

$$\mathrm{Fl}\,(1-2-3-4-1) = \mathrm{Fl}\,(a-2-3-c)$$

sein.

Also ist der nichtumkehrbare adiabatische Prozeß mit Hilfe der zwei Linien 1—4—3 und 1—3 darstellbar. Die Linie 1—4—3 gibt nämlich die indizierte oder dynamische Beschreibung der wirklichen Volumen-Druckänderungen, dagegen 1—3 stellt die Endzustände (Gleichgewichtszustände) des fiktiven Prozesses mit nur den Punkten 1 und 3 als reellen Zuständen dar.

Nehmen wir nun ein Beispiel, um die oben erwähnten Begriffe zu konkretisieren.

Beispiel. In einem Zylinder C (Fig. 3) kann der Kolben K Pendelbewegungen zwischen den Volumina V_0 und V_1 in solcher Weise ausführen, daß die Bewegung von V_0 bis V_1 eine adiabatische umkehrbare Kompression der im Zylinder erhaltenen Luftmenge verursacht, dagegen die Bewegung des Kolbens nach oben von

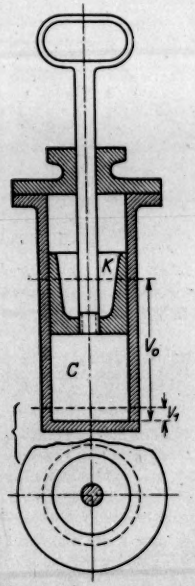


Fig. 3.

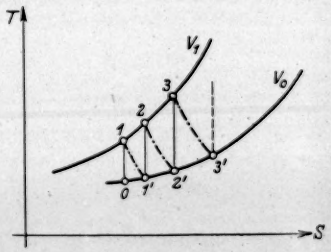


Fig. 4.

V_1 bis V_0 eine irreversible adiabatische Ausdehnung mit dem Irreversibilitätsgrad ϱ hervorruft. Es sei die Zahl der zur Erhöhung der Temperatur von T_0 bis T_z^0 abs. nötigen Pendelbewegungen zu berechnen. Die äußere Wärmeleitung wird vernachlässigt.

Nach einfachen Berechnungen erhalten wir die Temperaturen in den Punkten 1, 2, 3 . . .

$$T_z = T_0 \varrho^{z(k-y)+y-1}$$

und in den Punkten 1', 2', 3', ...

$$T_{z'} = T_0 \varrho^{z(k-y)},$$

wobei z die Zahl der Pendelbewegungen und $\varrho = \frac{V_0}{V_1}$ ist, oder mit Rücksicht auf (50)

$$k - y = \frac{\lg [1 + \varrho (\varrho^{k-1} - 1)]}{\lg \varrho};$$

somit bzw.,

$$T_z = T_0 \varrho^{k-1} \varrho^{\frac{(z-1)\lg[1+\varsigma(\varrho^{k-1}-1)]}{\lg \varrho}} = T_0 \varrho^{k-1} \varrho^{\frac{z-1}{a \lg \varrho}} \quad (51)$$

und

$$T_{z'} = T_0 \varrho^{\frac{z' \lg[1+\varsigma(\varrho^{k-1}-1)]}{\lg \varrho}} = T_0 \varrho^{\frac{z'}{a \lg \varrho}}, \quad (52)$$

wobei $\lg[1 + \varsigma(\varrho^{k-1} - 1)] = \frac{1}{a}$ gesetzt ist.

Also aus (51) und (52) ergibt sich

$$z = a \lg \frac{x}{\varrho^{k-1}} + 1 \quad (53)$$

und

$$z' = a \lg x, \quad (54)$$

wobei $\frac{T_z}{T_0} = x$ ist.

Aus den letzten Gleichungen folgt, daß bei gegebenem Irreversibilitätsgrad ς Temperatur und Volumen auf die Zahl z der Kolbenbewegungen im entgegengesetzten Sinn wirken. Falls z. B. $\frac{T_z}{T_0} = 10$, $\varrho = \frac{V_0}{V_1} = 10$ und $k = 1{,}4$, so erhalten wir für verschiedene Irreversibilitätsgrade ς die Zahl der nötigen Pendelungen des Kolbens nach der folgenden Tabelle.

ς	$1 + \varsigma(10^{0{,}4} - 1)$	$z' = a$	$z = 0{,}6\,a + 1$
1	2,51	von 2 bis 3	von 2 bis 3
0,7	2,06	„ 2 „ 3	„ 2 „ 3
0,5	1,75$_5$	„ 4 „ 5	„ 3 „ 4
0,3	1,45	„ 6 „ 7	„ 4 „ 5
0,1	1,15	„ 16 „ 17	„ 10 „ 11
0,01	1,01$_5$	$\cong$ 161	„ 97 „ 98
0	1,00	$+\infty$	$+\infty$

Also ist im betrachteten Fall der thermische Effekt nur eine Folge der Irreversibilität ausschließlich und bei $\varsigma = 0$ tritt kein Wärmeeffekt auf.

4. Nicht umkehrbare Kreisprozesse. Beim Kreisprozeß ging der Körper in den Anfangszustand zurück. Dabei müssen die Änderungen aller Zustandsgrößen nach Beendigung des Kreisprozesses gleich Null sein.

Man erhält zuerst aus (7) durch zyklische Integration (bzw. Summierung)

$$\oint_1^2 K_a \nabla^2 T dV_i d\tau = 0, \quad (55)$$

d. h. der Fouriersche Wärmestrom ist entweder stets gleich Null oder erleidet infolge des Kreisprozesses periodische Änderungen;

somit aus (16) ähnlicherweise

$$\oint_1^2 K_a \frac{dT}{dn} d\omega d\tau = \oint_1^2 D \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial K_i}{\partial \eta} dV_i d\tau \quad (56)$$

und daher bzw. aus (23) und (19)

$$U_2^i - U_1^i = -An \oint p_i dV \quad (57)$$

und mit Weglassen der inneren Summierungszeichen

$$\oint_1^2 K_a \frac{dT}{dn} d\omega d\tau = \oint_1^2 l_i dV_i d\tau = A \oint \triangle W. \quad (58)$$

Also beim Kreisprozeß ist der äußere Wärmestrom mit dem thermodynamischen Wärmeaufwande identisch, d. h. die äußere Arbeit des Kreisprozesses entsteht auf Kosten des äußeren Wärmestromes. Der innere Wärmestrom spielt hier, wie beim isothermischen Prozeß (vgl. I 3b), die Rolle eines vermittelnden Übergangsgliedes, was aus der Gleichung (58) unmittelbar hervorgeht.

Keiner der sogenannten „wirklichen Kreisprozesse" genügt den letztgenannten Bedingungen, weil diese thermodynamisch-ungeschlossenen Zustandsänderungen keine Kreisprozesse im strengen Sinn darstellen.

Bei den Arbeitsprozessen, die z. B. in Gas- und Ölmotoren verwirklicht sind, erfolgt die äußere Arbeit auf Kosten der Atomenergie der Verbrennungsstoffe entweder unter Bedingungen des adiabatischen Prozesses oder sogar mit negativen äußeren Wärmeaufwand.

Das Verbrennungsgemisch erhält von außen keine Wärmemenge. Vielmehr verliert es selbst beim Verbrennungsprozesse infolge der Leitung und Strahlung beträchtliche Teile der entwickelten Verbrennungswärme.

Der reelle Arbeitsprozeß[1]) entwickelt sich also nach der Gleichung

$$\triangle Q + \triangle Q^i = dU^m + A \Sigma \triangle W, \quad (59)$$

wobei $\triangle Q^i$ die innere Verwandlungswärme als der innere thermodynamische Wärmeaufwand erscheint, d. h. $\triangle Q^i = -dU^i$. Die Summe von den negativen äußeren ($\triangle Q$) und positiven inneren ($\triangle Q^i$) thermodynamischen Wärmeaufwänden

$$\triangle Q + \triangle Q^i$$

stellt nämlich den gesamten thermodynamischen Wärmeaufwand beim reellen Arbeitsprozeß dar. Die äußere Arbeit dieses Prozesses kann man als die des einseitig gerichteten Wärmestromes

$$Q^i_{1-2} = U_2^m - U_1^m + Q_{2-1} + A W_{1-2} \quad (60)$$

1) Diese Zeitschr. 26, 622, 1925.

unter der Bedingung

$$U_2^m - U_1^m \neq 0 \qquad (61)$$

und mit dem ökonomischen Wirkungsgrad

$$\eta_\ddot{o} = \frac{AW_{1-2}}{Q^i_{1-2}} = 1 - \frac{Q_{2-1}}{Q^i_{1-2}} = \frac{632}{C_k H} \qquad (62)$$

betrachten, wobei Q_{2-1} die sämtlichen Wärmestromverluste, W_{1-2} die äußere Nutzarbeit und Q^i_{1-2} die wirklich entwickelte Verbrennungswärme (effektiver Heizwert) der Verbrennungsstoffe bedeuten.

Schließlich ist dieser in der Natur einseitig gerichtete Arbeitsprozeß, wobei sich allmählich die innere chemische Energie der Verbrennungsmaterie in die äußere Arbeit verwandelt, der klassischen Betrachtung nach durch den Kreisprozeß mit positivem äußeren Wärmeaufwand ersetzt, und dabei der wirkliche Arbeitsprozeß durch den konventionellen Kreisprozeß mit unveränderlichem Arbeitskörper. Dieser Ersatz ist bei verschiedenen Anwendungen nicht ohne weiteres durchführbar mit willkürlichen Annahmen verbunden und kann sogar zum Widerspruch führen[1]). Diese Frage ist auch in der technischen Literatur besprochen[2]). Da reelle Arbeitsperioden von den adiabatischen Prozessen praktisch nur wenig abweichen, so kann man hier den Irreversibilitätsgrad auch nach der Formel (44) bestimmen.

Schluß. (Der verallgemeinerte Erhaltungssatz). Nun entsteht die Frage, ob die klassischen Fundamentalsätze über die Erhaltung der Stoffe von Lavoisier (1783) und über die Erhaltung der Energie von Helmholtz und R. Mayer allgemeine Gültigkeit besitzen.

Seit Louis de Broglie können wir behaupten, daß nur die Vereinigung beider Sätze in der Form

$$d(U^r + U^T) = 0$$

oder, falls $U^r = F(M) = \varrho M$,

$$\varrho M + U^T = \text{const.},$$

wobei M die Newtonsche Masse, U^T die innere thermodynamische Energie und ϱ der Wärmeäquivalenzkoeffizient der Masse bedeuten, für isolierte Systeme allgemein gültig ist. Bei manchen Zustandsänderungen aber ist das Materieglied ϱM fast konstant und dann gelten die klassischen Erhaltungssätze.

Von diesem Gesichtspunkt aus hat auch die Folgerung aus dem reziproken Theorem über die unlösbare Verbindung zwischen der Wärmeenergie und der Materie im Lichte der neuen physikalischen Wellentheorie eine große Bedeutung.

Es ist hier notwendig, die physikalische von der methodologischen Seite der Frage zu trennen. Das Problem besteht nicht darin, ob man die Naturerscheinungen auf zwei Arten, entweder materiell oder energetisch vorstellen bzw. beschreiben kann.

Die Emanations- und Undulationstheorien des Lichtes bilden ein glänzendes Beispiel solcher Möglichkeit, wobei auch scheinbar die Bequemlichkeiten der Betrachtungsweisen gleich sind. Es kommt vielmehr darauf an, welche dieser beiden Möglichkeiten überall dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft und der Eindeutigkeit der physikalischen Realität entsprechender ist.

Leningrad, Technologisches Institut 1921 bis 1929.

(Eingegangen 24. Oktober 1929.)

1) Siehe z. B. diese Zeitschr. **26**, 626, 1925, Fußnote 1.

2) Dazu vgl. z. B. F. Schmidt, Forschungsarb. V. d. I. H. **314**, 1929; Nusselt, Zeitschr. f. d. gesamte Turbinenwesen H. 1/3, 1917; Seiliger, Zeitschr. d. V. d. I. **66**, 8, 1922 u. a.

Schwingungen von Membranen in einer pulsierenden Flüssigkeit.

Ein Beitrag zur Resonanztheorie des Hörens.

Von W. Kucharski.

In den folgenden Abschnitten wird der Versuch gemacht, die Schwingungsvorgänge im Schnekkenapparat des menschlichen Gehörs in ihren Hauptzügen rechnersich zu erfassen. Da es sich um ein recht kompliziertes Schwingungssystem handelt, sind erhebliche Vereinfachungen erforderlich, wenn man ohne allzu umfangreiche Methoden zu einigermaßen übersichtlichen Resultaten kommen will. Andererseits ist aber eine solche Zurechtstutzung des Problems so lange gerechtfertigt, als die meisten Daten des untersuchten Organs nur ungenau bekannt sind, einige kaum der Größenordnung nach.

Die Untersuchung wurde angeregt durch die Lektüre von Bd. VIII, Akustik, des Handbuches für Physik von Geiger und Scheel (Springer, 1927), auf den auch bezüglich der Literaturangaben verwiesen wird. Zwei Arbeiten seien besonders erwähnt[1]), da in ihnen beschreibende Erklärungen der Vorgänge gegeben wer-

1) O. Fischer, über ein von Max Wien geäußertes Bedenken gegen die Helmholtzsche Resonanztheorie des Hörens. (Ann. d. Phys. **25**, 1908, vierte Folge.)

E. Budde, über die Resonanztheorie des Hörens. (Physik. Zeitschr. **18**, 225, 1917.)

den, die den hier vorgelegten Berechnungen in mancher Beziehung nahestehen und sie teilweise erleichtert und unterstützt haben; die Abweichungen werden sich im Laufe der Untersuchung von selbst ergeben.

In Abschnitt I werden die grundlegenden Gleichungen für ein Schema aufgestellt, das zwar vereinfacht ist, aber doch einige wesentlich erscheinende Grundzüge des Schneckenapparates aufweist. Abschnitt II behandelt die Lösung für einen — in unserem Ohr nicht vorliegenden — Einzelfall, der jedoch zur Beurteilung früherer Erklärungsversuche wichtig ist. Hieran schließen sich in Abschnitt III einige allgemeine Schlüsse und Betrachtungen über Verhältnisse, die den tatsächlich vorliegenden näher kommen, wodurch die Basis für die ziffernmäßige Durchrechnung eines ziemlich allgemeinen Falles gewonnen wird. Diese wird in Abschnitt IV durchgeführt und diskutiert; in Abschnitt V endlich werden einige Vermutungen ausgesprochen, die sich aus dem Verhalten des untersuchten Schemas für die Vorgänge im komplizierten Apparat des menschlichen Ohres ergeben.

I.

In Fig. 1 sind zwei Kanäle I und II von ungefähr kreisförmigem und sich nach einem Ende verjüngendem Querschnitt dargestellt, die in ein als absolut starr angenommenes Material eingearbeitet sind. Die Zwischenwand ist entfernt und durch eine Membran M ersetzt, deren Eigenschaften noch genauer beschrieben werden. Am Kanalbeginn A sowie an den Seiten schließt die Membran die Kanäle vollkommen voneinander ab; an dem Kanalende B läßt sie aber eine Verbindung durch die Öffnung C frei, so daß wir ungefähr einen Kanal von doppelter Länge erhalten, der in der Mitte zusammengebogen ist.

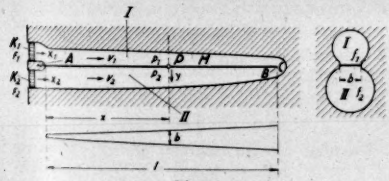


Fig. 1.

Am Kanalanfang sind in geringer Entfernung von A zwei zylindrische Öffnungen von den Querschnitten F_1 und F_2 angeordnet, für jeden Kanal eine, und durch die dichtschließenden, aber leicht beweglichen Kolben K_1 und K_2 verschlossen. Die Kanäle sind von einer inkompressiblen Flüssigkeit von bekannter spezifischer Masse ϱ und Zähigkeit ν vollkommen angefüllt.

An dem Kolben K_1 greift ein Gestänge an, dessen Art hier nicht weiter interessiert, und das deswegen auch in die Figur nicht eingetragen ist; es erteilt dem Kolben Bewegungen, die im folgenden als rein periodisch angenommen werden. Da die Kanalwandungen starr und die Flüssigkeit inkompressibel ist, muß der Kolben K_2 bei Bewegung von K_1 zwangläufige Bewegungen ausführen, die der von K_1 positiv oder negativ verdrängten Flüssigkeitsmasse entsprechen.

Die Ähnlichkeit dieses Schemas mit dem Schneckenapparat des menschlichen Gehörs ist unverkennbar: K_1 entspricht dem ovalen Fenster mit dem an ihm angreifenden Steigbügel, K_2 dem runden Fenster, Kanal I der Scala vestibuli, Kanal II der Scala tympani, die Öffnung C dem Helikotrema. In der Membran M ist das ganze von der Membrana basilaris und der Reißnerschen Membran (Membrana vestibuli) bestehende bzw. von ihnen eingeschlossene Organ für die Zwecke der ersten Rechnungen zusammengefaßt; in Abschnitt V wird die Berechtigung dieses zweifellos gewaltsamen Schrittes dargelegt und auch näher erklärt, warum trotz dieser Vereinfachung die Membran M im wesentlichen als Repräsentant der Basilarmembran angesehen wird.

Abgesehen von dieser Vereinfachung bestehen noch folgende Hauptunterschiede zwischen dem Schema der Fig. 1 und dem Gehörorgan: Der Doppelkanal ist in Wirklichkeit zu der bekannten Schneckenform aufgewunden und hat keinen so stetigen Querschnittsverlauf; die Knochenwände sind auch sicherlich nicht absolut starr, besonders wenn man die Kleinheit der durch den Steigbügel eingeleiteten Bewegungen berücksichtigt, und schließlich ist auch aus denselben Gründen die tatsächlich vorhandene Elastizität der eingeschlossenen Flüssigkeit nicht zu vergessen. Es wird nicht behauptet, daß alle diese Momente keine Rolle spielen; es erscheint aber angemessen, sie zunächst beiseite zu stellen, wofür oder wogegen im übrigen die Resultate der Rechnungen sprechen werden.

Die Hauptdimensionen der Kanäle sind ungefähr in den bei der Schnecke vorhandenen Verhältnissen skizziert; die Gesamtlänge der Membran beträgt 31 bis 33 mm. Die Membranbreite ist übertrieben dargestellt, sie beträgt bei A nur ca. 0,04, bei B ca. 0,5 mm.

Die Membran M betrachten wir der Einfachheit wegen und um die Aufmerksamkeit nicht von den Hauptpunkten abzulenken, als „zweidimensional"; d. h. wir nehmen an der Stelle x im Punkte P einen über die Breite b konstanten Schwingungsausschlag y, und ebenfalls über b konstante Werte für die bei P vorliegende Masse m, rückwirkende elastische Kraft c und Dämpfung

r an; die drei letztgenannten Größen sollen auf die Einheit der Fläche bezogen sein. Diese Vereinfachung kann auch so erklärt werden, daß man die Vorgänge im Längsmittelschnitt als maßgebend ansieht, wo die Annahmen ungefähr realisiert sind. An den Seiten des Kanals ist die Membran tatsächlich festgehalten, man könnte angesichts ihrer bekannten „Konstruktion" auch beinahe von Einspannung der Querfasern sprechen. Da es aber vorläufig ganz aussichtslos ist, diese Verhältnisse auch nur mit einiger Sicherheit rechnerisch zu erfassen, erscheinen für die erste Untersuchung die einfachsten plausibeln Annahmen als die zweckmäßigsten. Dabei wird auch nicht darauf eingegangen, wie diese elastischen und Dämpfungskräfte entstehen; es wird lediglich vorausgesetzt, daß sie vorhanden sind und an jeder Stelle gewisse Durchschnittswerte haben.

Die Durchschnittsgrößen m, c und r sind mit x veränderlich; der durchschnittliche Ausschlag y ist abhängig von x und der Zeit t. Breite b und die Kanalquerschnitte f_1 und f_2 sind ebenfalls Funktionen von x, die erst später spezialisiert werden; F_1 und F_2 werden als konstant angesehen, x_1 und x_2 sind nur von t abhängig.

Führt jetzt der Kolben K_1 eine periodische Bewegung aus, so wird die Flüssigkeit im Innern der Kanäle sowie die Membran M in Bewegung geraten; der im Ruhezustand des Systems gleichmäßig verteilte Flüssigkeitsdruck wird mit Ort und Zeit veränderlich sein und an einer Stelle x in unmittelbarer Nähe der Membran auf der einen Seite im allgemeinen andere Werte annehmen, als auf der anderen; der entsprechende Wert im Kanal I sei p_1, im Kanal II p_2. Die Bewegungsgleichung für das Membranelement $b \cdot dx$ kann dann sofort hingeschrieben werden; man erhält nach Division durch $b \cdot dx$:

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + r \frac{\partial y}{\partial t} + c \cdot y = p_1 - p_2 . \qquad (1)$$

Die Druckdifferenz $p_1 - p_2$ ist im allgemeinen weder bekannt noch unabhängig von y vorgeschrieben; sie ergibt sich aus den Strömungsvorgängen in den Kanälen. Offenbar sind diese langgestreckt, d. h. die Abmessungen ihrer Querschnitte klein gegen die Länge. Aus der Gesamteinrichtung der durch M dargestellten Membran ist ferner der sichere Schluß zu ziehen, daß die Auslenkungen y nur klein gegenüber den Querschnittsabmessungen der Kanäle sein können. Aus beidem folgt, daß die Geschwindigkeiten der Flüssigkeit in der Längsrichtung bei weitem über diejenigen in der Querrichtung überwiegen. Man kann diese daher vernachlässigen, ohne die Genauigkeit merklich zu beeinflussen. Damit werden aber auch Druckdifferenzen in der Querrichtung innerhalb eines Kanals eliminiert: p_1 und p_2 sind daher lediglich Funktionen von x und t. Daß an der Stelle x ein Drucksprung vorliegt, wenn man sich von einer Seite der Membran auf die andere begibt, ist durch Gl. (1) ausgedrückt und begründet; er wird durch die Spannungs-, Dämpfungs- und Beschleunigungskräfte der Membran herbeigeführt.

Die Längsgeschwindigkeit der Flüssigkeit ist infolge der Zähigkeit über den Querschnitt variabel; an den Wänden und an der Membran Null, nach der Mitte ungefähr parabolisch anwachsend. Es werden die Mittelwerte v_1 und v_2 eingeführt, definiert als Quotient der pro Zeiteinheit durch den Querschnitt strömenden Flüssigkeitsmenge und der Querschnittsfläche f_1 bzw. f_2; v_1 und v_2 sind Funktionen von x und t.

Man kann jetzt die Strömungsgleichung z. B. für ein Flüssigkeitselement $f_1 \cdot dx$ des Kanales I anschreiben und erhält nach Division durch $f_1 \cdot dx$:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = -\varrho \cdot \frac{dv_1}{dt} - r_1 \cdot v_1 . \qquad (2)$$

Hierin ist ϱ die spezifische Masse der Flüssigkeit und r_1 ein die Reibung berücksichtigender Faktor, der von der Zähigkeit der Flüssigkeit und von Form und Größe des Querschnitts in genügend bekannter Weise abhängt. Daß der Einfluß der Reibung hier lediglich mit der ersten Potenz der Geschwindigkeit, d. h. laminar angesetzt wird, ist dadurch begründet, daß hier nur sehr kleine und innerhalb kurzer Zeiten die Richtung wechselnde Bewegungen der Flüssigkeit in Frage kommen, so daß von turbulenten Wirbelungen, die ungefähr mit dem Quadrat der Geschwindigkeit anwachsen, aber zu ihrer Entwickelung Zeit und Raum brauchen, mit großer Genauigkeit abgesehen werden kann.

Die Beschleunigung $\frac{dv_1}{dt}$ setzt sich zusammen aus der örtlichen und der zeitlichen Änderung, so daß allgemein

$$\frac{dv_1}{dt} = v_1 \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial t} .$$

Da aber die Änderungen des Querschnittes mit x nicht stark sind und die Werte der Geschwindigkeit in Übereinstimmung mit der üblichen Theorie der Schwingungen klein vorausgesetzt werden, ist das erste Glied gegenüber dem zweiten zu streichen, so daß:

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} . \qquad (3)$$

Die Geschwindigkeit v_1 ist bestimmt durch die Bewegung des Kolbens K_1 und diejenige der Membran.

A_1 schickt im betrachteten Augenblick in den Kanal eine Flüssigkeitsmenge pro Zeiteinheit vom Betrage $F_1 \cdot \frac{dx_1}{dt}$. Ein Element der sich bewegenden Membran hat die nach außen gerichtete Geschwindigkeit $\frac{\partial y}{\partial t}$, entzieht also dem Kanal eine Flüssigkeitsmenge $\frac{\partial y}{\partial t} \cdot b \cdot dx$. Durch den Querschnitt f_1 bei x strömt also nur noch die Menge pro Zeiteinheit:

$$q = F_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} - \int_0^x b \frac{\partial y}{\partial t} dx .$$

Durch Division mit f_1 ergibt sich hieraus:

$$v_1 = \frac{F_1}{f_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} - \frac{1}{f_1} \cdot \int_0^x b \frac{\partial y}{\partial t} \cdot dx .$$

Hierin ist F_1 konstant, f_1 und b abhängig von x, x_1 Funktion von t, und y von t und x. Also wird:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{F_1}{f_1} \cdot \frac{d^2x_1}{dt^2} - \frac{1}{f_1} \int_0^x b \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx . \qquad (4)$$

Dies in (2) eingesetzt, ergibt:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = -\frac{F_1}{f_1}\left(\varrho \frac{d^2x_1}{dt^2} + r_1 \frac{dx_1}{dt}\right) + \frac{1}{f_1}\left[\varrho \int_0^x b \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx + r_1 \int_0^x b \frac{\partial y}{\partial t} dx\right]. \qquad (5)$$

Im unteren Kanal strömt an der gleichen Stelle x durch den Querschnitt f_2 die gleiche Flüssigkeitsmenge wie im oberen, nur in entgegengesetzter Richtung, da ja in den beiden Gesamträumen, die rechts und links von x liegen, keine Anhäufung von Flüssigkeit entstehen kann. Es ist also:

$$v_2 = -\frac{F_1}{f_2} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{1}{f_2} \cdot \int_0^x b \frac{\partial y}{\partial t} dx$$

und:

$$\frac{\partial p_2}{\partial x} = \frac{F_1}{f_2}\left(\varrho \frac{d^2x_1}{dt^2} + r_1 \frac{dx_1}{dt}\right) - \frac{1}{f_2}\left[\varrho \int_0^x b \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx + r_1 \int_0^x b \frac{\partial y}{dt} dx\right]. \qquad (6)$$

Die Subtraktion dieses Wertes von (5) ergibt $\frac{\partial (p_1 - p_2)}{\partial x}$. Differenziert man dann noch Gl. (2) partiell nach x und setzt den Differentialquotienten der Druckdifferenz ein, so erhält man mit den Abkürzungen:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \qquad (7)$$

und

$$\frac{r_0}{f} = \frac{r_1}{f_1} + \frac{r_2}{f_2} \qquad (8)$$

die Differentialgleichung für y in folgender Form:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + r \frac{\partial y}{\partial t} + c \cdot y\right) = -\frac{F_1}{f}\left(\varrho \frac{d^2x_1}{dt^2} + r_0 \frac{dx_1}{dt}\right) + \frac{1}{f}\left[\varrho \int_0^x b \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx + r_0 \int_0^x b \frac{\partial y}{\partial t} dx\right]. \qquad (9)$$

Hierin sind F_1 und ϱ bekannte Konstanten, m, r, c, b, f und r_0 bekannte Funktionen von x, die Werte von x_1 und seinen Ableitungen gelten als vorgeschrieben, also ebenfalls bekannt. Zu ermitteln ist y in seiner Abhängigkeit von x und t. Hierzu genügt Gl. (9) mit den vorgeschriebenen Anfangs- und Grenzbedingungen.

II.

Es werde nun zunächst ein einfacher Fall behandelt, der im menschlichen Ohr nicht verwirklicht ist, der aber zu den wenigen exakten Lösungen von (9) gehört, die ohne zu viel Rechenarbeit zu übersehen sind. Es ist außerdem von typischer Bedeutung für die Beurteilung eines Erklärungsversuches der Schwingungserscheinungen in der Schnecke, der 1917 von Lux gegeben wurde und in ähnlicher Weise auch der Resonanztheorie von Roaf-Fletcher zugrunde liegt. Hiernach sollen die bekannten, fast lokal konzentrierten Ausbauchungen der Basilarmembran im wesentlichen dadurch zustande kommen, daß jedes ihrer Längenelemente mit einer Flüssigkeitssäule von anderer Länge schwingt, die Länge gerechnet von dem betreffenden Element bis zum ovalen bzw. dem runden Fenster. Je näher das Element dem Anfangspunkt A zu liegt, um so kürzer ist die zugehörige Flüssigkeitssäule, um so höher also auch aus diesem Grunde die Resonanzschwingungszahl des betreffenden Elementes.

Wenn diese Erklärung zutrifft, müßte die vermutete Wirkung auch auftreten, wenn die Membran konstante Breite, Masse und Elastizität bei der Dämpfung Null besitzt, und wenn die Querschnitte der beiden Kanäle konstant sind. Dieser Fall muß also die Entscheidung über die Zulässigkeit jener Hypothese geben, da alle anderen Wirkungen eliminiert sind.

Es wird also gesetzt:

$$\left.\begin{aligned} b &= \text{konst.} \\ m &= \text{konst.} \\ c &= \text{konst.} \\ f &= \text{konst.} \\ r &= r_0 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Gl. (9) vereinfacht sich hiermit zu:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+c\cdot y\right)-\frac{\varrho b}{f}\int_0^x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,dx = -\frac{\varrho F_1}{f}\cdot\frac{d^2x_1}{dt^2} \qquad (11)$$

Durch partielles Differenzieren nach x erhält man:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+c\cdot y\right)-\frac{\varrho\cdot b}{f}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=O. \qquad (12)$$

Es interessieren lediglich harmonische Schwingungen; es genügt der Ansatz:

$$y = X\cdot\sin\omega t, \qquad (13)$$

worin die Kreisfrequenz ω konstant, aber zunächst beliebig, und X, die Amplitude des Ausschlages, eine noch zu bestimmende Funktion von x ist.

Ferner werden die verhältnismäßigen Koordinaten

$$\left.\begin{aligned}\chi &= \frac{X}{l}\\ \xi &= \frac{x}{l}\end{aligned}\right| \qquad (14)$$

sowie die dimensionslose Konstante

$$\varkappa^2 = \frac{\varrho b l^2}{m\cdot f\left(\frac{c}{m\omega^2}-1\right)} \qquad (15)$$

eingeführt; hiermit und unter Berücksichtigung von (13) ergibt sich aus (12) die Differentialgleichung für χ zu:

$$\frac{d^2\chi}{d\xi^2}+\varkappa^2\chi = O. \qquad (16)$$

Die Lösung läßt sich sofort hinschreiben; sie lautet:

für positives $\varkappa^2$, also $\frac{c}{m\omega^2}>1$:

$$\chi = A\cdot\sin\varkappa\xi + B\cos\varkappa\xi, \qquad (17)$$

für negatives $\varkappa^2$, also $\frac{c}{m\omega^2}<1$:

$$\chi = A^1\mathfrak{Sin}\varkappa\xi + B^1\mathfrak{Cos}\varkappa\xi. \qquad (18)$$

Die hyperbolischen Funktionen steigen von ihrem Wert bei $\xi = 0$ für wachsende ξ gleichmäßig an; die Membran, deren maximale Schwingungsausschläge durch χ gegeben sind, hat hiernach bei negativem $\varkappa^2$ eine einfache und gleichmäßige Form, die zur Anzeige oder Charakterisierung einer bestimmten Frequenz ω vollkommen ungeeignet ist. Die Lösung (18) hat also für die Resonanztheorie kein weiteres Interesse, und es ist lediglich die Lösung (17) weiter zu behandeln.

Für die Konstanten A und B ergibt sich eine Beziehung aus der selbstverständlichen Bedingung, daß der Druck beim Helikotrema C eindeutig, für $\xi = 1$ also $p_1 - p_2 = 0$ und damit auch $\chi = 0$ sein muß. Dies führt auf:

$$B = -A\cdot\operatorname{tg}\varkappa. \qquad (19)$$

Zur weiteren Bestimmung von A und B ist auf Gl. (11) zurückzugreifen, in der auch noch über $\frac{d^2x_1}{dt^2}$ zu bestimmen ist. Man überzeugt sich leicht, daß (11) erfüllt wird durch:

$$x_1 = A_1\cdot\sin\omega t, \qquad (20)$$

worin also A_1 die Amplitude des Kolbens K_1, der eine harmonische Bewegung ausführt, und:

$$A = -\varkappa\frac{F_1\cdot A_1}{b\cdot l^2}. \qquad (21)$$

Führt man noch die vom anderen Ende gezählte Ordinate ein durch

$$\lambda = 1-\xi, \qquad (22)$$

so erhält das Resultat die einfache Form:

$$\chi = \frac{F_1\cdot A_1}{b\cdot l^2}\cdot\frac{\varkappa}{\cos\varkappa}\sin\varkappa\lambda. \qquad (23)$$

Mit drei unabhängigen „Apparatkonstanten" α_1, α_2 und α_3 kann man auch schreiben:

$$\chi = \alpha_1\cdot\frac{\varkappa}{\cos\varkappa}\cdot\sin\varkappa\lambda,$$

wobei

$$\varkappa = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\frac{\alpha_3}{\omega^2}-1}}. \qquad (24)$$

Diese Form läßt besonders deutlich den Einfluß von ω bei einem gegebenen System erkennen.

Gl. (20) spricht im Zusammenhang mit dem Ansatz (13) die Tatsache aus, daß die aufgestellte Lösung die durch eine periodische Bewegung des Kolbens K_1 erzwungenen Schwingungen der Membran darstellt, die auch in dieser Arbeit allein behandelt werden. Dabei können allgemeinere Bewegungen des Kolbens K_1 in eine Fourierentwicklung zerlegt und die zugehörigen Einzellösungen in bekannter Weise superponiert werden.

Die Schwingungsform der Membran ist jetzt für alle Werte von ω zwischen 0 und α_3 festgelegt. Gl. (23) und (24) ergeben die Maximalausschläge, die in jedem Augenblick mit dem jeweiligen Wert von $\sin\omega t$ zu multiplizieren sind.

Bei $\omega = 0$ wird $\chi = 0$, entsprechend dem Umstande, daß es sich hier nur um die erzwungenen Schwingungen handelt.

Bei endlichem ω hat der Längsschnitt durch die Membran die Gestalt einer einfachen Sinus-

linie, die sich von Null auf dem rechten Ende ($\lambda = 0$, $\xi = 1$) bis zu dem entsprechenden Wert für das Argument $\varkappa$ bei $\lambda = 1$, $\xi = 0$ erstreckt. Die bei jedem ω vorhandene Form erhält man am einfachsten an Hand der in Fig. 2 gezeichneten Sinuskurve, die entsprechend der Ordinate $\lambda = 1 - \xi$ nach links gezogen ist. Der zu ω gehörige Wert von $\varkappa$ wird auf der Abszissenachse nach links abgetragen, dann stellt die bis zu diesem Punkt genommene Sinuslinie die zugehörige Membranform dar, allerdings in mit ω wachsendem Horizontalmaßstab. Tatsächlich drängt sich die mit $\varkappa$ wachsende Wellenzahl stets auf der gleichbleibenden Länge zusammen.

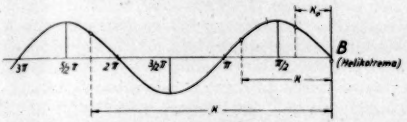


Fig. 2

Der Vertikalmaßstab ist durch die Apparatekonstanten und in seiner Abhängigkeit von ω durch $\frac{\varkappa}{\cos \varkappa}$ gegeben, wofür Fig. 3 eine Anschauung gibt. Der Wert wird für $\varkappa = n_1 \cdot \pi/2$ unendlich, wo n_1 die ganzen ungeraden Zahlen von 1 ab durchläuft, und wechselt jedesmal das Vorzeichen.

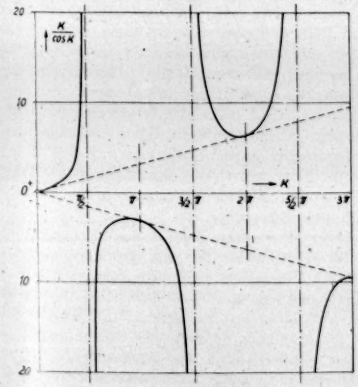


Fig. 3.

Die Vorgänge bei wachsendem ω sind nun leicht zu verfolgen:

Bei sehr kleinen $\varkappa$, etwa dem in Fig. 2 eingetragenen Wert $\varkappa_0$, schwingt die Membran in einfacher Krümmung. Bei wachsendem $\varkappa$ wachsen auch die Ausschläge entsprechend dem starken Anstieg von $\varkappa/\cos\varkappa$ stark an, gleichzeitig drängt sich ein immer längeres Stück der Sinuslinie auf der Membranlänge zusammen. Bei $\varkappa = \pi/2$ werden die Ausschläge sehr groß; jetzt liegt das erste Maximum der Sinuslinie am Membrananfang. Bei weiterem Anwachsen von ω, also von $\varkappa$, schwingt die Membran in entgegengesetzter Phase mit zunächst noch sehr großem, dann abfallendem Ausschlag. Bei $\varkappa = \pi$ ist die erste Nullstelle der Sinuslinie in den Membrananfang gerückt, diese schwingt jetzt etwa wie eine an den Enden gehaltene Saite. Die Ausschläge wachsen bei weiter steigendem $\varkappa$ wieder an; bei $\varkappa = {}^3/_2\pi$ werden sie wieder sehr groß, jetzt liegt das zweite Maximum der Sinuslinie am Membrananfang. Dann schlägt die Schwingungsphase wieder in die ursprüngliche um; bei $\varkappa = 2\pi$ hat die Membran die Form einer vollständigen Sinuslinie, also in der Mitte einen Schwingungsknoten. Wenn man also die bei $\lambda = 0$ liegende Nullstelle nicht mitzählt, so hat die Membranform für $(n-1)\,\pi < \varkappa < n\pi$ Nullstellen von der Anzahl n, wobei n eine ganze Zahl. Bei $\varkappa = n\pi$ ist der Ausschlag am Membrananfang gleich Null. Bei $\varkappa = n_1\pi/2$, wo n_1 eine ungerade Zahl, werden die Ausschläge sehr groß; gleichzeitig wechselt die Membran die Phase der Schwingung; dabei liegt ein Maximum des Ausschlages am Membrananfang.

Diese Diskussion der Membranform ist ausgegangen von konstant gehaltenem Ausschlag A_1 des Kolbens K_1. Es ist noch von Wichtigkeit, die Kräfte zu untersuchen, die an ihm von außen angreifen müssen, um die Bewegung aufrechtzuerhalten. Hierzu ist der Druck p_1 für $\xi = 0$ zu ermitteln.

Durch Benutzung von (5) und (6) erhält man unter Berücksichtigung von $p_1 = p_2$ für $\xi = 1$ den gesuchten Wert für den Kolben K_1 zu:

$$p_{1_0} = \frac{\varrho\omega^2 l F_1 \cdot A_1}{f}\left(\frac{\operatorname{tg}\varkappa}{\varkappa} - 2\right)\sin\omega t + f(t), \quad (25)$$

worin die zunächst unbestimmte Zeitfunktion durch den äußeren Druck und die Verhältnisse am „runden Fenster", dem Kolben K_2, gegeben ist. Der äußere Druck wird hier konstant und für K_1 und K_2 gleich angesetzt. K_2 sei federnd beweglich und erfahre bei der Auslenkung x_2 eine elastische Gegenkraft $c_2 \cdot x_2$ in Richtung der positiven x-Achse.

Hiermit wird dann:

$$f(t) = \frac{c_2 \cdot A_1 \cdot F_1}{F_2^2} \cdot \sin\omega t$$

und

$$p_{1_0} = \frac{\varrho\omega^2 l F_1 \cdot A_1}{f}\left(\frac{\operatorname{tg}\varkappa}{\varkappa} - 2 + \frac{c_2 \cdot f}{\varrho\omega^2 l \cdot F_2^2}\right)\sin\omega t \quad (26)$$

Ist also:

$$P_1 = P_0 \cdot \sin \omega t = - F_1 \cdot p_1, \qquad (27)$$

die an x_1 angreifende Kraft in Richtung der positiven x-Achse, die zur Aufrechterhaltung der untersuchten Bewegung erforderlich ist, so wird:

$$P_0 = - \varrho\, \omega^2\, l \cdot \frac{F_1^2 \cdot A_1}{f} \left(\frac{\operatorname{tg} \varkappa}{\varkappa} - 2 + \frac{c_2 \cdot f}{\varrho\, \omega^2\, l \cdot F_2^2} \right). \qquad (28)$$

Über die Konstanten des runden Fensters ist nichts Genaues bekannt; man ist daher genötigt, den letzten Ausdruck der Klammer unbestimmt zu lassen und die Diskussion auf den Wert:

$$P_0' = - \varrho\, \omega^2\, l \frac{F_1^2 \cdot A_1}{f} \left(\frac{\operatorname{tg} \varkappa}{\varkappa} - 2 \right) \qquad (29)$$

zu beschränken.

Bei konstant gehaltenem A_1 ist also für die Kraftamplitude P_0' der Wert $\frac{\operatorname{tg} \varkappa}{\varkappa} - 2$ maßgebend. P_0' wird sehr groß, wenn $\varkappa = n_1 \pi/2$, worin n_1 ungerade, also dann, wenn auch die Ausschläge der Membran sehr groß werden. Für $\operatorname{tg} \varkappa = 2\varkappa$ wird $P_0' = 0$; diese Stellen sind in bekannter Weise leicht zu ermitteln.

Es sei noch kurz der Fall bei konstant gehaltenem P_0' untersucht, den man erhält, wenn A_1 aus Gl. (29) bestimmt und in (23) eingeführt wird. Dies ergibt:

$$\chi = - a_4 \cdot P_0' \cdot \frac{\varkappa^2}{\omega^2 (\sin \varkappa - 2 \varkappa \cos \varkappa)} \cdot \sin \varkappa \lambda, \qquad (30)$$

worin a_4 eine weitere Apparatkonstante.

Mit anderen Worten: Die Form der schwingenden Membran ist die gleiche geblieben, wie früher; dagegen gilt für die Größe der Ausschläge bei gegebenem P_0 ein anderes Gesetz. Diese werden jetzt sehr groß, nicht wenn $\varkappa = n_1 \pi/2$, sondern wenn $\sin \varkappa = 2\varkappa \cos \varkappa$ oder $\operatorname{tg} \varkappa = 2\varkappa$, also wenn die Ausschläge des Kolbens K_1 sehr groß sind. Von Interesse ist noch der Ausschlag bei $\xi = 0$, $\lambda = 1$, für $\varkappa = n_1 \cdot \frac{\pi}{2}$, wo also A_1 Null. Für $\lambda = 1$ wird:

$$\chi = - a_4 \cdot P_0' \cdot \frac{\varkappa^2 \sin \varkappa}{\omega^2 (\sin \varkappa - 2 \varkappa \cos \varkappa)}.$$

Für $\varkappa = n_1 \pi/2$ ist aber $\cos \varkappa = 0$, also:

für $\xi = 0$ und $\varkappa = n_1 \cdot \pi/2$:

$$\chi = - a_4 \cdot P_0' \cdot \frac{\varkappa^2}{\omega^2},$$

also endlich. In diesem Falle ergeben sich in den Kanälen Strömungen, die nur von der Bewegung der Membran herrühren, während die beiden Kolben stillstehen; es handelt sich um stehende Eigenschwingungen der Membran, zu deren Aufrechterhaltung bei den betreffenden Frequenzen keine Bewegung der beiden Kolben erforderlich ist, wenn nur an diesen die entsprechenden Kräfte periodisch wirken. Dies für ähnliche Systeme bekannte Paradoxon ist natürlich durch die Vernachlässigung der in Wirklichkeit stets vorhandenen Dämpfung zu erklären.

Die Schwingungen der Membran mit konstanter Breite und sonstigen konstanten Daten sind hiermit in den Grundlinien klargestellt; weitere Einzelheiten sind leicht zu finden. Im Rahmen dieser Untersuchung sind folgende Konsequenzen wichtig:

Die Membran hat zwar für jede erregende Frequenz eine bestimmte Schwingungsform. Von der Zuordnung einer bestimmten Membranstelle zu einer bestimmten Frequenz ist aber auch nicht andeutungsweise die Rede. Die mehrfach vermutete Resonanzwirkung infolge der verschieden langen Flüssigkeitssäulen ist also nicht vorhanden. Der physikalische Grund hierfür ist klar: Die Trägheitswirkung einer Flüssigkeitssäule hängt nicht nur von ihrer Länge, sondern auch von ihren Querschnitten ab. Stellt man sich z. B. den oberen Kanal in Stromfäden unterteilt vor, die von den Membranelementen bis zum ovalen Fenster laufen, und erzwingt künstlich einen sehr großen Ausschlag für ein bestimmtes kurzes Membranstück, so wird dieses auch eine verhältnismäßig große Menge strömender Flüssigkeit an sich ziehen, wodurch die Strömungen in den anderen Teilen des Kanals, d. h. in den anderen Stromfäden, ebenfalls beeinflußt werden. Die einzelnen Stromfäden sind aber nicht unabhängig voneinander; da keine Zwischenwände vorhanden sind, stellt sich eine stetige Druckverteilung ein, wobei einem Druckgradienten bestimmte Beschleunigungen entsprechen. Läßt man dann den äußeren Zwang auf die Membran wieder fortfallen, so erhält man die im vorstehenden abgeleiteten Verhältnisse, da die Rechnung davon ausgeht, daß auf die Membran lediglich die Druckdifferenzen wirken, und diese sind mit den auftretenden Beschleunigungen in das richtige Verhältnis gesetzt.

Sollte eine solche Membran als Anzeigeapparat für verschiedene Frequenzen dienen, so wäre dazu ein Beobachtungsapparat von außerordentlicher Kompliziertheit erforderlich: er hätte nicht nur, und zwar fast momentan, die Anzahl der auf der Membran befindlichen Knotenpunkte zu zählen, sondern auch das Anfangsstück in der Nähe von $\xi = 0$ genau auszumessen. Denn durch die Anzahl der Knotenpunkte wird noch nicht eine bestimmte Frequenz, sondern erst ein Frequenzintervall festgelegt, und der genaue Wert ist erst feststellbar, wenigstens prinzipiell, durch Form und Länge des ersten Kurvenstückes zwischen dem Membrananfang $\xi = 1$ und dem ersten Knotenpunkt.

Dies ist bereits für eine Erregung durch einen

einfachen Ton kaum vorstellbar; die Schwierigkeiten werden noch größer, wenn es sich um gleichzeitig auftretende Frequenzen verschiedener Größe und Intensität handelt.

Dazu kommt der schwerwiegende Umstand, daß eine eindeutige Zuordnung zwischen Membranausschlag und Intensität der Erregung nicht erkennbar ist, wenigstens nicht so, daß die im Ohr auftretenden Reaktionen sich vorstellen, geschweige denn in den Einzelheiten deuten lassen.

Die gefundenen Schwingungsformen geben gleichzeitig die Erklärung für einige ältere und neuere Berichte über Versuche mit dünnen Membranen, und man kann sich vorstellen, wie auf Grund dieser komplizierten Vorgänge die Vermutung auftreten konnte, daß der „Beobachtungsapparat" im Ohr die gesamte Membranform bis in alle Einzelheiten abzutasten und zur momentanen Analyse weiterzumelden hat. Wie dies allerdings geschehen soll, und wie hiermit auch nur die einfachsten akustischen Phänomene gedeutet werden sollen, wäre erst festzustellen.

Bei Untersuchung von Membranen mit örtlich veränderlichen Eigenschaften wird sich zeigen, daß diese komplizierten Hypothesen mit ihren kaum verstellbaren Folgerungen nicht erforderlich sind.

III.

Um einen besseren Anschluß an die Wirklichkeit zu erhalten, sei jetzt angenommen:

$$c = \gamma \cdot (1 - \xi)^2 = \gamma \cdot \lambda^2 , \qquad (31)$$

worin γ eine Elastizitätskonstante.

Im übrigen bleiben die durch Gl. (10) im vorigen Abschnitt festgelegten Voraussetzungen bestehen. Auch der Ansatz (13) mit seinen Konsequenzen wird beibehalten.

Die Differentialgleichung für χ sei noch auf die hier bequemere Variable λ transformiert; man erhält:

$$\frac{d}{d\lambda}[(\varkappa_1 \cdot \lambda^2 - 1) \cdot \chi] + \varkappa_2 \int_1^{\lambda} \chi \cdot d\lambda + \varkappa_3 = O. \qquad (32)$$

Hierin ist, unter Auffassung von γ/m als Quadrat einer Kreisfrequenz ω_0:

$$\varkappa_1 = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = \frac{\gamma}{m \cdot \omega^2} ; \qquad (33)$$

ferner:

$$\varkappa_2 = \frac{\varrho \cdot b \cdot l^2}{m \cdot f} \qquad (34)$$

und

$$\varkappa_3 = \frac{\varrho \cdot F_1 \cdot A_1}{m \cdot f} . \qquad (35)$$

Zur Lösung von (32) werde angesetzt:

$$\chi = \sum_0^{\infty} a_n \cdot \lambda^n , \qquad (36)$$

worin n die Reihe der ganzen Zahlen von 0 an durchläuft.

Für die Koeffizienten dieser Reihe erhält man in üblicher Weise die Rekursionsformel:

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \varkappa_1 + \frac{\varkappa_2}{(n+1)(n+2)} ; \qquad (37)$$

die Reihe zerfällt in zwei voneinander unabhängige, von denen die eine nach geraden, die andere nach ungeraden Potenzen von λ fortschreitet. Der Ansatz (36) enthält also im Bereiche der Konvergenz die vollständige Lösung von (32).

Da die gerade Reihe mit einer Konstanten a_0 anfängt, χ aber für $\lambda = 0$ aus den im vorigen Abschnitt angegebenen Gründen Null wird, ist die Konstante a_0 und damit die auf ihr aufgebaute Reihe mit geraden Exponenten Null zu setzen; als Lösung verbleibt (36) mit n als ungerader Zahl von 1 anfangend.

Aus (37) ergibt sich der Quotient aus zwei aufeinanderfolgenden Gliedern dieser Reihe zu

$$\lambda^2 \cdot \left(\varkappa_1 + \frac{\varkappa_2^2}{(n+1)(n+2)}\right),$$

was bei wachsendem n dem Wert $\lambda^2 \cdot \varkappa_1$ beliebig nahekommt. Die Reihe geht also bei großem n in die geometrische mit dem Quotienten $\varkappa_1 \cdot \lambda^2$ über, welche konvergiert, solange dieser unter 1 bleibt, und deren Wert für den Quotienten 1 unendlich ist.

Die jetzt behandelte Membran hat also für

$$\varkappa_1 \cdot \lambda^2 < 1$$

endliche Ausschläge;

$$\left.\begin{array}{l} \text{für } \lambda^2 = \varkappa_1 \\ \text{wird aber:} \\ \qquad \chi = \infty . \end{array}\right| \qquad (38)$$

Nach Gl. (33) ist aber:

$$\frac{1}{\varkappa_1} = \frac{m\omega^2}{\gamma} = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 ;$$

ferner ist $\dfrac{m}{\gamma \cdot \lambda^2} = \dfrac{m}{c^2} = \dfrac{1}{\omega_0^2 \cdot \lambda^2}$ das Quadrat der Eigenschwingungszahl des Membranelements an der betreffenden Stelle.

Gl. (38) spricht also das plausible Resultat aus, daß die Membran, deren Ausschlag bei $\lambda = 0$ Null bleibt, mit λ wachsende Ausschläge erfährt, die an derjenigen Stelle unendlich werden, an der die lokale Eigenschwingungszahl des betreffenden Membranelementes mit der erregenden Frequenz übereinstimmt, wo also, bei Vernachlässigung der Dämpfung, Resonanz eintritt.

Damit ist ein Mechanismus gefunden, der im Sinne der Resonanztheorie als Anzeigeapparat für Frequenzen, die unter ω_0 liegen, brauchbar ist. Bezeichnet man mit λ_1 die der Kreisfrequenz ω zugeordnete Resonanzstelle, so besteht der Zu-

sammenhang:

$$\omega = \lambda_1 \cdot \sqrt{\frac{\gamma}{m}} = \lambda_1 \cdot \omega_0 . \qquad (39)$$

Der Ansatz (31) ergibt also eine lineare Zuordnung, wobei die Abszisse der Resonanzstelle, vom Helikotrema gerechnet, proportional mit ω wächst; ω_0 ist die Eigenschwingungszahl des unmittelbar beim ovalen Fenster liegenden Membranelementes.

Bei $\omega > \omega_0$ schwingt die Membran durchweg mit endlichen Ausschlägen; ihre Anzeigefähigkeit ist überschritten.

Laut Gl. (37) haben sämtliche Koeffizienten der Reihe das gleiche Vorzeichen; es gibt also — wenigstens bis zur Resonanzstelle — keine Knotenpunkte der Schwingungsform; die Verhältnisse sind gegenüber dem vorigen Abschnitt vollkommen geändert.

Für $\lambda^2 > \frac{1}{\varkappa_1}$ versagt die Lösung (36), da hierfür die Reihe divergiert. Von Versuchen, auch für diesen Teil der Membran eine exakte Lösung zu finden, soll hier abgesehen werden, da dieses Beispiel lediglich prinzipielle Bedeutung hat, ohne die wirklichen Vorgänge mehr als andeutungsweise wiederzugeben. Die Dämpfung der Membran ist für die Hörtheorie zu wichtig, um dauernd außer Betracht zu bleiben, auch deutet alles darauf hin, daß die hier zunächst angenommene lineare Zuordnung von Frequenz und Resonanzstelle auch nicht annähernd zutrifft. Für allgemeinere Annahmen über die Eigenschaften der Membran bei gleichzeitiger Berücksichtigung von Membrandämpfung und Kanalreibung werden aber exakte Lösungen der Schwingungsgleichung recht schwierig; die Benutzung von Näherungslösungen wird erforderlich und ist hier um so mehr gerechtfertigt, als die Hauptdaten des behandelten Organs nur unvollkommen und vielfach noch nicht einmal der Größenordnung nach bekannt sind.

Als wichtiges Resultat der Untersuchung einer Membran mit quadratisch veränderlicher Elastizität wird lediglich festgestellt, daß eine exakte Lösung das Vorhandensein einer Zuordnung zwischen erregender Frequenz und einem extrem großen Schwingungsausschlag ergibt, der an derjenigen Stelle liegt, die auch ohne das Vorhandensein der Flüssigkeit bei entsprechender Erregung in Resonanz kommen würde. Dieses Ergebnis ist physikalisch so plausibel, daß es wohl mit Sicherheit auf Membranen mit anderen Eigenschaften verallgemeinert werden kann. Es erscheint jedoch nicht selbstverständlich, denn es ist ohne die genauere Untersuchung nicht vorauszusehen, ob z. B. der Druckverlauf in der pulsierenden Flüssigkeit sich einer solchen Schwingungsart anpassen kann. Solange sich aber die Membraneigenschaften stetig ändern, dürfte gegen die Verallgemeinerung nichts einzuwenden sein, zumal die stets vorhandene Dämpfung die Verhältnisse weniger extrem macht.

Um jetzt eine brauchbare Näherung für möglichst allgemeine Verhältnisse zu erhalten, werde an die kurze Konvergenzbetrachtung für die Reihe (36) angeknüpft. Es hat sich gezeigt, daß die Stelle des Unendlichwerdens von χ lediglich durch die Konstante $\varkappa_1$ bedingt ist, während $\varkappa_2$ hierfür jedenfalls keine Rolle spielt. Auch tritt $\varkappa_2$ in den Koeffizienten stets mit $(n+1)(n+2)$ dividiert auf, also in einer verhältnismäßig kleinen Zahl. Dies legt den Gedanken nahe, die mit ihm versehenen Glieder zu vernachlässigen.

Dies kommt aber, wie ein Blick auf die grundlegende Differentialgleichung (9) und ihre Ableitung zeigt, darauf hinaus, daß das Integral $\int \chi d\xi$ gestrichen wird, daß also die infolge der Membranbewegung quer zur Kanalachse strömenden Flüssigkeitsmengen gegenüber den in der Längsrichtung pulsierenden vernachlässigt werden.

Für die Zulässigkeit dieses Schrittes spricht folgendes:

Die Membranbreite b ist auf dem größten Teil der Länge klein gegen die Abmessungen der Kanalquerschnitte. Die Membranausschläge sind im Rahmen der üblichen Schwingungstheorie als klein anzunehmen, was auch sicherlich für die Wirklichkeit zutrifft. Es werden also tatsächlich die querfließenden Massen gegen die andern zurücktreten; größere Differenzen sind höchstens in der Nähe der Resonanzstelle zu erwarten. Auch an dieser Stelle werden in Wirklichkeit keine allzu großen Unterschiede auftreten. Auf den ausgleichenden Einfluß der Dämpfung wurde bereits hingewiesen; es sei ferner daran erinnert, daß die Basilarmembran selbst der pulsierenden Flüssigkeit nicht überall direkt ausgesetzt, sondern auf der einen Seite von ihr durch den Ductus cochlearis getrennt ist. Dieser ist mit einer ziemlich zähen Flüssigkeit gefüllt und von der Scala vestibuli, dem Kanal I des Schemas, noch durch die glatte Reißnersche Membran getrennt. Das Hauptschwingungsgebilde ist aber sicherlich die Basilarmembran, und wenn auch wesentliche Längsströmungen im Ductus cochlearis kaum anzunehmen sind, so erscheint es doch naheliegend, daß die Resonanzausschläge der Basilarmembran auf der Reißnerschen nicht annähernd reproduziert werden, sondern sich höchstens in gleichmäßigen verteilten Vibrationen äußern werden. Das bedeutet aber, daß die Längsströmungen in der Scala vestibuli von den Querschwingungen der Membran nicht sehr stark beeinflußt werden können. Auf der anderen Seite

ist zwar die Basilarmembran direkt mit der Flüssigkeit der Scala tympani, des Kanals II des Schemas, in Berührung. Dieser scheint jedoch im Durchschnitt einen größeren Querschnitt zu haben, so daß etwaige Strömungen durch die seitliche Bewegung der Membran hier ebenfalls nur wenig ausmachen werden.

Aus alledem wird die Berechtigung hergeleitet, das genannte Integral für die erste Untersuchung zu streichen.

Die Vereinfachung, die hierdurch für die rechnerische Arbeit erzielt wird, ist so groß, daß fast alle Annahmen für die Membran, die Kanäle usw. der Rechnung zugänglich gemacht werden. Denn die Vernachlässigung des Integrals bedeutet nichts anderes, als daß der Verlauf des Flüssigkeitsdruckes bei stillstehender Membran festgestellt werden kann. Damit sind dann die erregenden Kräfte für jedes Membranelement bekannt, und dessen Bewegung ergibt sich ohne weiteres aus den Schwingungsgleichungen eines Massenpunktes.

Dies werde sofort auf das letzte Beispiel angewandt.

Nach Streichung des Integrals läßt sich Gl. (32) sofort integrieren und ergibt mit einer Integrationskonstanten C_1:

$$\chi = \varkappa_3 \frac{C_1 - \lambda}{\varkappa_1 \lambda^2 - 1};$$

und da für $\lambda = 0$ auch $\chi = 0$, wird $C_1 = 0$, also:

$$\chi = \frac{\varkappa_3 \cdot \lambda}{1 - \varkappa_1 \lambda^2}. \qquad (40)$$

Wie vermutet, wird die „Resonanzstelle", an der χ unendlich wird, hierdurch richtig angegeben; gleichzeitig erhalten wir — wenigstens annähernd — die Fortsetzung der Lösung über die kritische Stelle hinaus, wo hiernach die Membran in entgegengesetzter Phase schwingt mit nach dem ovalen Fenster hin abnehmenden Ausschlägen.

Der Vollständigkeit wegen sei erwähnt, daß man in vielen Fällen, z. B. dem vorstehenden, die Näherung um einen Grad weiter treiben kann. Wenn man $\varkappa_2$ zwar nicht als Null, aber als klein voraussetzt, kann man nach einem schon von Helmholtz angewandten Verfahren setzen:

$$\chi = \chi_0 + \varkappa_2 \chi_1 + \varkappa_2^2 \chi_2 + \cdots\cdots. \qquad (41)$$

Setzt man dies in (32) unter Beibehaltung des Integrals ein und faßt die Glieder mit gleichen Potenzen von $\varkappa_2$ zusammen, so ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\frac{d}{d\lambda}\left[(\varkappa_1 \lambda^2 - 1)\chi_0\right] = -\varkappa_3, \qquad (42)$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left[(\varkappa_1 \lambda^2 - 1)\chi_1\right] + \varkappa_2 \int_1^{\lambda} \chi_0 d\lambda = 0, \qquad (43)$$

usf.

Gl. (42) liefert das gleiche Resultat wie (39) und (40); hiermit ist dann das Integral in (43) auszuwerten, worauf die Gleichung zu integrieren ist. Dies bedeutet nichts anderes, als daß zunächst die Druckverteilung bei stillstehender Membran und hiermit die zugehörige Schwingungsform ermittelt wird, daß dann mit dieser eine verbesserte Druckverteilung und die hierzu gehörigen Ausschläge berechnet werden usf. Voraussetzung ist, daß das Verfahren konvergiert, was sich in jedem Fall ergibt; es hat den Vorteil, daß es auch bei empirisch gegebenen Verhältnissen brauchbar ist, da lediglich Quadraturen vorkommen, die graphisch ausführbar sind.

Eine Nachrechnung für den zuletzt behandelten Fall, wobei die erste Potenz von $\varkappa_2$ berücksichtigt wurde, ergab, daß die Glieder mit $\varkappa_2$ Stelle und Art des Unendlichwerdens des Ausschlages nicht beeinflussen. Die Wiedergabe kann unterbleiben.

IV.

Es wird jetzt dazu übergegangen, an Hand der letzten Ausführungen ein Schema nach Fig. 1 ziffernmäßig durchzurechnen, wobei die Dimensionen und sonstigen Daten in ungefährer Übereinstimmung mit den über das menschliche Gehörorgan bekannt gegebenen zugrunde gelegt werden. Eine große Genauigkeit ist hierbei weder zu erwarten noch beabsichtigt, da man schon für die Hauptkonstanten auf ganz rohe Schätzungen angewiesen ist. Man wird daher auch gelegentlich vor Abrundungen u. dgl. nicht zurückschrecken, wenn die Rechenarbeit dadurch verringert und die Einflüsse der Vereinfachungen übersehbar bleiben; es darf nicht vergessen werden, daß es sich hier um die Herausarbeitung von annehmbaren Grundvorstellungen handelt, nicht um die Aufstellung einer bis in die Einzelheiten exakten Theorie.

Die Erregung am ovalen Fenster wird in Übereinstimmung mit dem bisherigen angesetzt zu:

$$x_1 = A_1 \cdot \sin \omega t. \qquad (44)$$

Die Druckdifferenz $p_1 - p_2$ wird sich dann zusammensetzen aus zwei Gliedern, von denen eines von der Beschleunigung $\frac{d^2 x_1}{dt^2}$, das andere von dem Reibungsglied mit $\frac{dx_1}{dt}$ als Faktor abhängen wird. Es wird also etwa sein:

$$p_1 - p_2 = B(a_0 \sin \omega t + b_0 \cos \omega t), \qquad (45)$$

worin a_0 und b_0 als bekannt anzusehende Funktionen von ξ.

Anstatt (45) läßt sich in bekannter Weise schreiben:

$$p_1 - p_2 = \hat{p}_a \sin(\omega t + \varphi), \qquad (46)$$

wobei durch

$$p_a = B \cdot a_0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2} \qquad (47)$$

die resultierende Druckamplitude definiert ist, und durch

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b_0}{a_0} \qquad (48)$$

der Winkel, um den diese der Erregung am ovalen Fenster voraneilt.

Gl. (1) geht hiermit über in:

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + r\frac{\partial y}{\partial t} + cy = p_a \sin(\omega t + \varphi). \qquad (49)$$

Dies stellt, da m, r, c, p_a und φ lediglich von x abhängig, an jeder Stelle der Membran also zeitlich konstant sind, für jedes Membranelement eine normale erzwungene Schwingung mit Dämpfung dar. Ist also ψ der Winkel, um den die Phase des Ausschlages y gegen die auf das Membranelement einwirkende Kraft nacheilt, so wird in bekannter Weise:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{r\omega}{c - m\omega^2} \qquad (50)$$

und

$$y = X \cdot \sin(\omega t + \varphi - \psi), \qquad (51)$$

worin

$$X = \frac{p_a \cdot \sin\psi}{r \cdot \omega} = \frac{B}{m\omega^2} \cdot \frac{a_0\sqrt{1 + \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{r}{m\omega}\right)^2 + \left(\frac{c}{m\omega^2} - 1\right)^2}} \qquad (52)$$

Durch X sind die Maximalausschläge in Abhängigkeit von x oder ξ gegeben; diese treten nicht gleichzeitig auf, da φ und ψ mit ξ variieren; die in jedem Zeitpunkt gleichzeitig vorhandenen Ausschläge sind durch Gl. (51) bestimmt.

Die Form der Membran für jeden Zeitpunkt gibt also Gl. (51); die Kurve $X = f(x)$ ist die Einhüllende für alle Kurven $y = f(t_1 x)$.

Es sind jetzt die Zahlenwerte aufzustellen und in die Gleichungen einzusetzen.

Für die Kanalquerschnitte wird nach roher Schätzung und Vermutung, in Ermangelung genauer Werte, gesetzt:

$$f_1 = 2{,}74\,(1{,}40 - \xi)\ mm^2,$$
$$f_2 = 4{,}80\,(1{,}40 - \xi)\ mm^2,$$

d. h. linear mit ξ abnehmend auf ungefähr $\frac{1}{4}$ des Anfangsquerschnittes, wobei $f_2 = \infty\ 1{,}75 f_1$.

Die Koeffizienten für die Kanalreibung werden unter der Voraussetzung ungefähr kreisförmigen Querschnittes in Übereinstimmung mit dem Poisseuilleschen Gesetz:

$$r_1 = \varrho \cdot \frac{8\pi \cdot \nu}{f_1}$$
$$r_2 = \varrho \cdot \frac{8\pi \cdot \nu}{f_2},$$

wobei ν der kinematische Zähigkeitskoeffizient und ϱ die spezifische Masse der Flüssigkeit.

Für ϱ wird der Wert von Wasser abgerundet eingesetzt, nämlich $10^{-7}\ \frac{g\,\mathrm{sec}^2}{mm^4}$, wobei g die Einheit der Kraft; ν wird etwa fünfmal so groß wie bei Wasser gewählt, also zu $\sim 5{,}0\ \frac{mm^2}{\mathrm{sec}}$. Diese Schätzung von ν ist vielleicht übertrieben, da die Angaben darin übereinstimmen, daß die Flüssigkeit in den beiden Skalen in bezug auf Zähigkeit ungefähr einer physiologischen Kochsalzlösung gleichkommen, jedenfalls erheblich dünnflüssiger als die im Ductus cochlearis befindliche sein soll. Es wird sich aber zeigen, daß der Einfluß der Kanalreibung nur bei kleinen Frequenzen merklich ist, so daß eine etwaige Überschätzung auf das Gesamtresultat kaum von Einfluß ist.

Durch Einsetzen der bisher genannten Werte in die allgemeinen Druckgleichungen (5) und (6), in denen die Integrale zu streichen sind, durch Integration nach x bzw. ξ und unter Berücksichtigung, daß $p_1 = p_2$ für $\xi = 1$ ergibt sich mit:

$$\frac{1}{f_0} = \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right)\xi = 0:$$

$$p_1 - p_2 = -1{,}40 \cdot \varrho \cdot \frac{F_1 \cdot A_1}{f_0} \cdot l \cdot \omega^2 \times \qquad (53)$$
$$\times \left(\ln\frac{1{,}40 - \xi}{0{,}40} \cdot \sin\omega t + \frac{115{,}9}{\omega} \cdot \frac{1 - \xi}{1{,}40 - \xi}\cos\omega t\right).$$

Hierbei ist die durch ω dividierte Konstante 115,9 im zweiten Glied in der Klammer so berechnet, daß ω hier wie üblich in 1/sec einzusetzen ist. Im übrigen kann das Maßsystem noch beliebig gewählt werden. Die Zahl 1,400 rührt von der für die Querschnitte f_1 und f_2 getroffenen Annahme her. Aus dieser Gleichung sind die Werte B, a_0 und b_0 für Gl. (52) zu bestimmen.

Für die Schwingungseigenschaften der Membran liegen noch weniger Anhaltspunkte vor, als für die vorstehend angenommenen Daten. Doch gelingt es, einen ungefähr brauchbar erscheinenden Ansatz in folgender Weise zu finden:

Schon ohne Rechnung kann man vorhersagen, daß die Neigung der Druckkurve, die im Zähler von Gl. (52) enthalten ist, gering sein wird gegenüber derjenigen der Membrankurve. Das Maximum des Ausschlages bei einer bestimmten Frequenz wird daher fast genau bei demjenigen Wert von ξ liegen, für den die Wurzel im Nenner von X ein Minimum wird, was offenbar für

$$\frac{c}{m} \cdot \frac{1}{\omega^2} = 1$$

eintritt. Auf Grund des Verdeckungseffektes

reiner Töne haben nun Wegel und Lane die Schwingungsform der Membran zu bestimmen versucht; aus den hierüber mitgeteilten Werten entnimmt man ganz roh folgende Tabelle für die Lage des Maximums des Ausschlages bei verschiedenen Frequenzen:

Entfernung (*mm*) vom ovalen Fenster	$\frac{\omega}{2\pi}\,\frac{1}{\text{sec}}$
7,5	3500
10	2100
20	500.

Dieser Verlauf wird der Art nach ungefähr wiedergegeben, wenn man in 1/sec² ansetzt:

$$\frac{c}{m} = 1150^2 \left(\frac{1{,}04}{\xi^2} - 1\right)^2, \tag{54}$$

wobei über c und m im einzelnen noch nichts angenommen ist.

Daß hierbei $\frac{c}{m}$ für $\xi = 0$ unendlich wird, braucht nicht zu stören; dies würde lediglich bedeuten, daß die ersten Membranteilchen als nicht schwingend angesehen werden. Es wird hiermit nicht behauptet, daß dies zutrifft; doch wissen wir über diese Einzelheiten noch nichts Bestimmtes, so daß es im Rahmen der Überschlagsrechnungen zunächst zwecklos erscheint, die Rechnung durch Beseitigung dieses Schönheitsfehlers zu komplizieren. Es kommt hier nur auf den allgemeinen Verlauf an.

Für die Dämpfung der Membran liegen Schätzungen vor. Man nimmt im Durchschnitt für das log. Dekrement $\mathfrak{d}$ den Wert 0,1 an, für die hohen Frequenzen etwas niedriger, für die tiefen mehr. Es werden zur Sicherheit etwas höhere Werte eingesetzt, nämlich: $\mathfrak{d} = 0{,}1\,(1+\xi)$, und dies führt mit der hier zulässigen Vereinfachung $\mathfrak{d} = \pi \cdot \frac{r}{m}\sqrt{\frac{m}{c}}$ unter Berücksichtigung der für c/m getroffenen Annahme auf:

$$\frac{r}{m\cdot\omega} = \frac{36{,}6}{\omega}(1+\xi)\left(\frac{1{,}04}{\xi^2} - 1\right), \tag{55}$$

worin wieder auf der rechten Seite ω in 1/sec einzusetzen.

Wird nun noch zur Vereinfachung der Rechnung eine Verhältnisziffer χ_0 eingeführt durch:

$$\chi = \frac{X}{l} = -1{,}400 \cdot \frac{\varrho \cdot F_1 \cdot A_1}{m \cdot f_0} \cdot \chi_0,$$

so wird schließlich:

$$\chi_0 = a \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}}{\sqrt{a^2 + (\gamma^2 - 1)^2}} \tag{56}$$

mit:

$$\left.\begin{aligned} a &= \ln \frac{1{,}40 - \xi}{0{,}40} \\ b &= \frac{b_1}{a} \\ b_1 &= 116 \cdot \frac{1-\xi}{1{,}40 - \xi} \\ \gamma &= \frac{1150}{\omega} \cdot \beta \\ \beta &= \frac{1{,}04}{\xi^2} - 1 \\ \alpha &= 0{,}0318 \cdot (1+\xi) \cdot \gamma \end{aligned}\right| \tag{57}$$

Man überzeugt sich leicht, daß dies mit den vorstehenden Annahmen übereinstimmt mit Ausnahme der Ziffer in b_1, die von 115,9 auf 116 aufgerundet ist.

Die Werte a, b, β sind von ω unabhängig; γ und α sind für alle Werte von ω besonders zu berechnen.

Mit diesen Werten ist nun χ_0 nach Gl. (56) für verschiedene Frequenzen verhältnismäßig einfach zu berechnen, womit sich auch y, d. h. die Membranform ergibt.

Dabei ist nicht zu vergessen, daß außer F_1 noch A_1, d. h. der Ausschlag des ovalen Fensters, und m, also die Masse der Membran pro Einheit der Fläche, noch unbestimmt gelassen sind. Wird also χ_0 diskutiert, so ist A_1 für die verschiedenen Frequenzen konstant und m von ξ unabhängig vorausgesetzt. Dies soll zunächst geschehen. Konstantes m würde bedeuten, daß die über $\frac{c}{m}$ getroffene Annahme bis auf eine Konstante das Gesetz für den Verlauf von c, der durchschnittlichen rückwirkenden Kraft pro Einheit der Fläche darstellt.

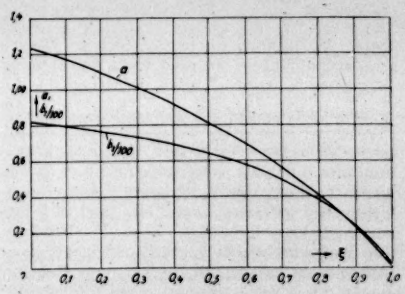


Fig. 4.

In den Fig. 4 bis 8 sind die Hauptresultate der ziffernmäßigen Berechnung dargestellt, sämtliche Werte sind über der Abszisse ξ, also der Membranlänge aufgetragen.

Fig. 4 zeigt den Verlauf von a und b_1, also bis auf den jeweiligen Maßstab die Bestandteile der Druckdifferenzen $\dot{p}_1 - \dot{p}_2$, und zwar a, soweit die Beschleunigung, b_1, soweit die Zähigkeit in Frage kommt. Da b_1 noch durch die jeweilige Kreisfrequenz ω zu dividieren ist, spielt die Kanalreibung, wenigstens unter den getroffenen Annahmen, keine große Rolle.

In Wirklichkeit wird der Verlauf der Druckdifferenz über ξ nicht so gleichmäßig sein wie in Fig. 4, da die Querschnitte der beiden Skalen nicht linear, sondern unregelmäßig verlaufen.

Fig. 5 zeigt graphisch den durch die Wahl von $\frac{c}{m}$ gegebenen Zusammenhang zwischen der Frequenz und der Lage der zugehörigen Resonanzstelle auf der Membran. Die Kurve zeigt die allgemein angenommene Tatsache, daß sich die

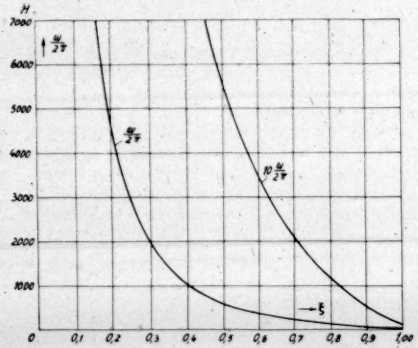


Fig. 5.

hohen Frequenzen auf immer kürzeren Längen zusammendrängen. In einer nach Abschluß der Rechnungen veröffentlichten Arbeit spricht Békésy[1]) die Vermutung aus, daß ungefähr $\frac{d\omega}{d\lambda} = \text{konst.}\,\omega$; dies führt auf eine Exponentialfunktion, durch die sich die als Anhalt zu grunde gelegten Werte von Wegel und Lane tatsächlich besser erfassen lassen, als durch die hier angenommene Funktion. Eine Wiederholung der Rechnung erschien jedoch im Plane dieser Arbeit nicht erforderlich, da hier mehr Gesichtspunkte als Ziffern gewonnen werden sollen.

In Fig. 6 ist dann die Kurve für $\chi_{0\,max}$ gezeichnet, die bei konstantem A_1 und m die Maximalausschläge der Membran angibt. Die zugehörigen Frequenzen gibt Fig. 5. Ferner sind für drei Frequenzen die zugehörigen Werte von χ_0 eingetragen, also — bis auf den Maßstab — die Maximalausschläge, die die Membran bei den betreffenden Frequenzen an den einzelnen Stellen erfährt.

Das Bild dürfte mit den bisher auf andere Weise gewonnenen Vorstellungen in Anbetracht der rohen Unterlagen befriedigend übereinstimmen, was für die grundsätzliche Richtigkeit der hier entwickelten physikalischen Anschauung und für die Zulässigkeit der eingeführten Näherungen spricht. Verbesserungen und Verfeinerungen sind hiernach leicht vorzunehmen.

Auch für den Verlauf von $\chi_{0\,max}$ dürfte gelten, daß die Kurve in Wirklichkeit weniger regelmäßig gekrümmt ist. Zur genaueren Untersuchung wäre eine Kenntnis des genauen Verlaufs der Querschnitte der Skalen erforderlich, und selbstverständlich spielt die Dämpfung hier-

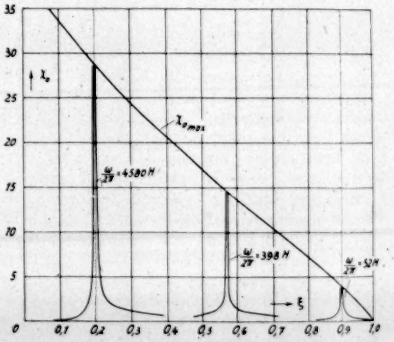


Fig. 6.

für eine ausschlaggebende Rolle. Auch ist nicht gesagt, daß m konstant ist.

Zu den für konstante Frequenz gezeichneten Kurven ist noch zu bemerken, daß sie noch nicht die Membranform selbst darstellen, auch nicht im Augenblick des Maximalausschlages. Die einzelnen Elemente schwingen nicht in gleicher Phase, und da die Dämpfung klein ist, sind die Phasenwinkel gerade in der Nähe des Resonanzpunktes stark verschieden.

Dies zeigen im einzelnen Fig. 7 und 8.

In Fig. 7 ist für $\frac{\omega}{2\pi} = 4580\ H$ zunächst die Kurve für χ_0 bei vergrößertem Maßstab von ξ gezeichnet. Gleichzeitig sind die Ausschläge der Membran im Augenblick des Maximalausschlages eingetragen; die Werte entstehen aus χ_0 durch Multiplikation mit $\sin\psi$, der nach Früherem leicht zu berechnen ist. Man ersieht, daß die Resonanzstelle hiernach noch viel schärfer aus-

1) Békésy, Zur Theorie des Hörens, Physik. Zeitschr. **30**, 721, 1929.

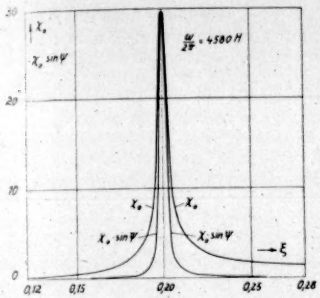


Fig. 7.

geprägt erscheint, als nach der χ_0-Kurve, jedenfalls für den gewählten Augenblick.

In Fig. 8 sind dann noch die Membranformen für eine vollständige Halbschwingung bei Zeitabständen von $\frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{\omega}$ gezeichnet, und zwar für den niedrigen Wert von $\frac{\omega}{2\pi} = 398\ H$ und mit einem gegen die Hauptrechnung auf das Dreifache vergrößerten Dämpfungswert, damit die Kurven auch in der Nähe des Resonanzpunktes gut zu unterscheiden sind. Als Nullpunkt für die Zeit ist der Moment genommen, in dem die Membran den Maximalausschlag nach unten ausführt. Der Einfluß der Kanalreibung ist hierbei der Einfachheit wegen vernachlässigt ($\varphi = 0$).

Die Abbildung bedarf keiner weiteren Erläuterung. Die Membran zeigt während eines großen Teils der Schwingung eine Doppelbiegung, und man darf wohl die Vermutung aussprechen, daß sie diesen Formen infolge des zunächst vernachlässigten Zusammenhangs in

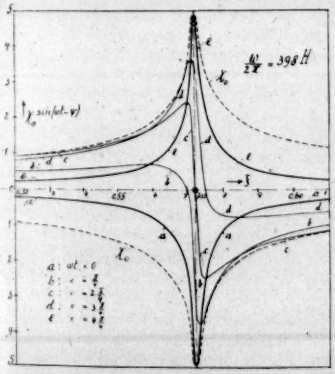


Fig. 8.

der Längsrichtung, verbunden mit ihrer inneren Dämpfung, besonders großen Widerstand entgegensetzen wird, so daß gerade die Zwischenformen mit doppelter Faltung sich weniger scharf ausbilden werden, als die Überschlagsrechnung ergibt. Dies könnte zur Folge haben, daß die Resonanzstelle noch besonders scharf ausgeprägt ist.

Es wäre nun verlockend, die Rechnung weiterzutreiben und z. B. die Verhältnisse für konstante Druckamplituden am Trommelfell zu diskutieren. Hierzu wäre eine Kenntnis der am ovalen und am runden Fenster bei einem bestimmten Ausschlag auftretenden elastischen Kräfte erforderlich, wofür ich jedoch keine Anhaltspunkte finden konnte. Daraus, daß die hier berechnete Kurve für $\chi_{0\,\max}$ bei konstantem A_1 wenigstens in rohem Verlauf mit der von Wegel und Lane bei konstanter Druckamplitude am Trommelfell gezeichneten übereinstimmt, könnte man schließen, daß die elastischen Gegenkräfte an den genannten Verschlußmembranen so groß sind, daß die Trägheitswirkungen der pulsierenden Perilymphe hiergegen nicht viel ausmachen. Dies wäre nicht unmöglich, wenn man bedenkt, daß die Endplatte des Steigbügels, die doch als starr anzusehen ist, das ovale Fenster fast ganz abzudecken scheint, so daß bei einer Deformation der abdichtenden und nachgiebigen Randbänder verhältnismäßig große Kräfte auftreten müssen. Ebenso soll der Versuchung widerstanden werden, absolute Ziffern für die Druckdifferenzen, Membranausschläge usw. zu bestimmen, und zwar aus folgenden Gründen: Zur Gewinnung absoluter Größen wären ebenfalls Schätzungen über die am ovalen Fenster auftretenden Kräfte und Ausschläge erforderlich, die ohne ausführliches Eingehen auf den gesamten Hörapparat nicht möglich sind. Ferner ist noch die schwingende Masse der Membran unbestimmt geblieben, und hierfür fehlen alle Anhaltspunkte, besonders auch deswegen, weil es sich bei dem wirklichen Apparat sicherlich nicht um ein einfaches Schwingungsgebilde handelt; und es wäre wohl vermessen, heute eine ziffernmäßige Annahme über diejenigen Massen und ihren Einfluß zu treffen, die entweder direkt auf der Membran lasten oder sonst mit ihr gekoppelt sind. Nur soviel sei gesagt, daß man auf die Annahme außerordentlich kleiner Verschiebungen des ovalen Fensters und verhältnismäßig großer mitschwingender Massen geführt wird, wenn die Membranausschläge eine plausible Größe nicht überschreiten sollen. Beides ist nicht unwahrscheinlich.

Eine vorläufige Abschätzung darüber, ob der eingeschlagene Berechnungsweg, insbesondere die Vernachlässigung der Integrale in Gl. (9), wirklich zulässig ist, kann man auf folgende Weise vornehmen:

Wie man aus Fig. 7 abmißt, beträgt bei $\frac{\omega}{2\pi} = 4580\ H$ das Volumen zwischen Ruhelage der Membran und ihrem größten Ausschlag reichlich gerechnet $0{,}01 \cdot y_{max} \cdot l \cdot b$. Die Membranlänge ist rund 33 mm, die Breite an der betreffenden Stelle etwa 0,15 mm; das aus dem Kanal seitlich entnommene Volumen also etwa $0{,}01 \cdot 0{,}15 \cdot 33 \cdot y = 0{,}05 y$ mm³! Der durchschnittliche Ausschlag über die Breite wird $^1/_{10}$ der Breite, also 0,015 mm kaum überschreiten können; dies führt auf ein Volumen von 0,00075 mm³. Nimmt man an, daß dies höchstens $\frac{1}{10} \cdot F_1 \cdot A_1$ werden darf, damit keine wesentlichen Abweichungen von den Berechnungsgrundlagen eintreten, so muß $F_1 \cdot A_1$ mindestens $10 \cdot 0{,}00075 = 0{,}0075$ mm³ sein. F_1 kann zu etwa 3 mm² geschätzt werden, dies ergibt für A_1 0,0025 mm, also ein Sechstel von y_{max}. Da das Verhältnis der Größenordnungen der beiden Organe das umgekehrte ist, wie dasjenige der soeben angeschriebenen Ziffern für die Ausschläge, dürften diese zugunsten der Rechnung sprechen. Auch hierüber wird aber eine definitive Aussage erst möglich sein, wenn die Größe von m näher bekannt ist. Wenn dies der Fall ist, dürfte auch der Moment für verfeinerte Rechnungen gekommen sein.

V.

Als Abschluß werde kurz auf die Abweichungen eingegangen, die der wirkliche Apparat gegenüber dem behandelten Schema aufweist.

Da ist zunächst die spiralige Windung der Kanäle, die bisher als gerade gestreckt betrachtet wurden. Bekanntlich treten in gekrümmten Kanälen an den Außenwänden größere Drucke auf als innen, die den infolge der Zentripetalbeschleunigungen auftretenden Massenkräften das Gleichgewicht halten. Nach den mir zugänglichen Skizzen der Schnecke bildet die Reißnersche Membran, die den Druck des Kanales I aufnimmt und überträgt, für diesen die im Sinne der Krümmung äußere Wand, so daß eine gewisse Steigerung des berechneten Druckunterschiedes infolge der Krümmung nicht undenkbar ist.

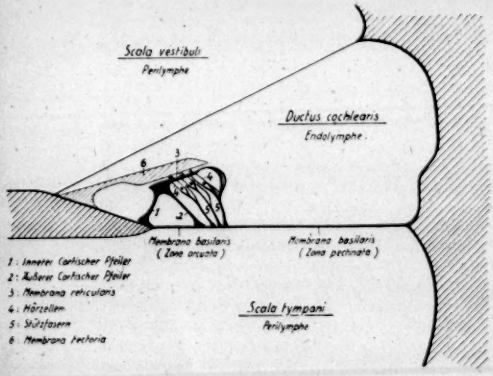


Fig. 9

Von größerer Wichtigkeit erscheint aber die Frage, wie die hier ausgearbeitete Theorie der Schwingungen einer recht einfachen aufgebauten Membran mit dem Verhalten des komplizierten Gebildes in Einklang zu bringen ist, das in Wirklichkeit die beiden Kanäle voneinander trennt.

Hier bieten sich fast von selbst, zum Teil in Übereinstimmung mit älteren Anschauungen, folgende Gedankengänge dar:

Durch die Reißnersche Membran auf der einen, durch die Basilarmembran auf der anderen Seite wird (zusammen mit der Schneckenwand) ein schlauchartiges Gebilde, der Ductus cochlearis, abgegrenzt, der mit einer Flüssigkeit von erheblicher Zähigkeit gefüllt ist. Die Reißnersche Membran ist dünn und glatt; die im Kanal I auftretenden Drucke werden also zweifellos momentan auf die Flüssigkeit des Ductus cochlearis übertragen. Da die in diesem enthaltene Flüssigkeit sehr zähe ist und es sich um außerordentlich rasch wechselnde Druckimpulse handelt, werden sich nennenswerte Längsströmungen hier nicht ausbilden können, die Drucke werden einfach auf die Basilarmembran übertragen. Auf diese Weise wird die von der Außenlymphe ausgehende Druckerregung ausgenutzt, und trotzdem bleiben die im Ductus cochlearis befindlichen Organe von den Wirkungen der pulsierenden Flüssigkeitsmassen beschützt. Diese Organe erfahren lediglich einen allseitigen pulsierenden Flüssigkeitsdruck, wodurch sie in ihren Funktionen nicht gestört werden. Man kann also annehmen, daß die Basilarmembran tatsächlich in ähnlicher Weise zu Schwingungen erregt wird, wie bei dem Schema nach Fig. 1.

Dagegen werden die Schwingungen selbst komplizierter ausfallen, als bisher vorausgesetzt. Fig. 9 stellt zum Teil in Anlehnung an Budde einen schematischen Querschnitt durch die Basilarmembran, die ausschließenden Organe und den Ductus cochlearis dar. Die üblichen Benennungen sind in die Fig. eingetragen.

Die Cortischen Pfeiler sind wohl als starr anzunehmen; ich vermute, daß der äußere auch Druckkräfte überträgt, da sonst die Ausbildung des Gelenkkopfes an der Stelle des Zusammentreffens mit dem inneren nicht verständlich wäre. Ferner erscheint es einleuchtend, daß die von

diesem Gelenkkopf ausgehende Brücke (die Membrana reticularis), die die Hörzellen trägt, zwar schwingungsfähig ist, aber keine scharf ausgeprägten Resonanzstellen haben kann. Hieraus scheint mir, ebenfalls ähnlich wie bei O. Fischer und Budde angedeutet, zu folgen, daß die Cortischen Pfeiler zusammen mit der genannten Brücke nur den schwächeren, aber über die Länge gleichmäßiger verlaufenden Schwingungen der Basilarmembran folgen werden, da die Bewegungsimpulse am Ansatzpunkte des äußeren Cortischen Pfeilers direkt von der Membran auf das genannte System übertragen werden. Den örtlich scharf konzentrierten Resonanzausschlägen der Basilarmembran wird aber die wenig bewegliche, aus Cortischen Pfeilern und Netzmembran bestehende Konstruktion nicht folgen können.

Von Wichtigkeit scheint mir nun, daß von den Hörzellen noch Fasern von festerem Aufbau ausgehen, die auch bereits als „Stützfasern" bezeichnet sind, und außerhalb des äußeren Cortischen Pfeilers auf der Zona pectinata der Basilarmembran ansetzen; diese „Stützfasern" habe ich in möglichster Anlehnung an eine von Budde reproduzierte Zeichnung Helds in Fig. 9 aufgenommen. Die Basilarmembran dürfte in dieser Gegend bereits ziemlich freie Bewegungen ausführen und auch ihre Resonanzerscheinungen kräftig äußern. Wenn man nun noch annimmt, daß die „Stützfasern" als „Übertragungsfasern" wirken, so hätte man die gewünschte und auf manchen Umwegen bereits erschlossene Funktion, wonach die Hörzellen und die in diesen befindlichen Hörhaare in ausgeprägter Weise durch eine bestimmte Resonanz erregt werden, daß aber die sonstigen, gleichmäßiger verteilten Bewegungen der Basilarmembran kaum von Einfluß sind. Bei dieser Erklärung könnte es verwunderlich erscheinen, daß die Übertragungsfasern in so kurzer Entfernung von dem Ansatzpunkt des äußeren Cortischen Pfeilers auf die Basilarmembran stoßen. Die bekannte Analogie mit dem Klavier dürfte aber diesen Einwand zerstreuen, wobei die Querfasern der Basilarmembran den Saiten, die Stützfasern dem — allerdings mit der Saite festverbundenen — Hammer entsprechen; die Funktion ist eben die umgekehrte wie beim Klavier. Würden die Übertragungsfasern — vorausgesetzt, daß sie überhaupt als solche wirken — in der Mitte der schwingenden Faser aufsetzen, so würden die Schwingungen stark behindert, wahrscheinlich gänzlich verändert werden. Dies wird nicht eintreten, wenn die Fasern nahe dem einen Ende der Saite angreifen. Absichtlich ist in Fig. 9 der Cortische Apparat zusammen mit der Basilarmembran in ihrer ganzen Breite wiedergegeben; der Charakter des Schwingungssystems scheint mir hierdurch anschaulich zu werden: Querfaser der Basilarmembran als Klaviersaite; „Entnahme" der durchschnittlichen und gleichmäßigen Schwingungen durch den äußeren Pfeiler zur Übertragung auf die Netzmembran; Abtasten der Resonanzausschläge durch die „Stützfasern"; Weiterführung dieser Impulse nach den Hörzellen.

Läßt man der Phantasie einen vielleicht zu weiten Spielraum, so könnte man die Vermutung aussprechen, daß die ganze Netzmembran mit dem von ihr getragenen Apparat dauernd unter Spannung gegen die Membrana tectoria anliegt, worauf die bekannte Tendenz des inneren Cortischen Pfeilers, sich aufzurichten, sprechen würde. Dieses System würde dann den Durchschnittsbewegungen der Basilarmembran folgen, die durch den äußeren Cortischen Pfeiler übertragen werden, und die „Stützfasern" würden die bei den Resonanzausschlägen auftretenden lokalen Impulse auf die Hörzellen usw. übertragen, ohne daß hier große Relativ-Bewegungen auftreten. Sollte es ein Zufall sein, daß die „Stützfasern" ausgesprochene Federform haben, und wäre nicht für die sicherlich vorhandene außerordentliche Feinheit dieses Apparates die Annahme eines möglichst soliden Zusammenhangs plausibler als die von schaukelnden, pendelnden und stauchenden Bewegungen z. B. der Hörzellen und -haare?

Hierüber kann aber nichts Bestimmtes gesagt werden, da anscheinend noch nicht festliegt, ob die Membrana tectoria mit der Netzmembran verbunden ist oder frei in die Endolymphe hineinragt. Da ihre Funktion ziemlich sicher darin besteht, die Gegenfläche für die Hörhaare zu bilden, müßte in beiden Fällen angenommen werden, daß sie die gleichmäßig verlaufenden Bewegungen der Netzmembran mitmacht. Dies wäre am leichtesten einzusehen, wenn die Verbindung bestände; im anderen Falle wäre erforderlich, daß die Schwingungsbewegungen auf die Membrana tectoria durch die Endolymphe übertragen werden. Auch dies erscheint nicht unmöglich; die Räume zwischen dem Cortischen Apparat und der Deckmembran sind so schmal, daß ein seitliches Ausweichen der zähen Endolymphe bei den hohen Schwingungszahlen kaum anzunehmen ist.

Eine Entscheidung über diese verwickelten Einzelfragen kann hier nicht getroffen werden; die gesamten Ausführungen des letzten Abschnittes sind als Vermutungen anzusehen, die mit aller gebotenen Zurückhaltung geäußert werden.

Zusammenfassung.

Es wird an Hand eines vereinfachten Schemas eine Theorie der Membranschwingungen in der

Schnecke des menschlichen Gehörs entwickelt und durch ziffernmäßige Rechnungen belegt, nach der im Gegensatz zu älteren Anschauungen der Druckausgleich des pulsierenden Labyrinthwassers stets zur Hauptsache durch das Helikotrema hindurch erfolgt. Man hat es hiernach im wesentlichen mit einer hin und her schwingenden Flüssigkeitssäule zu tun, deren Massen- und Reibungsdrucke die Membran in Schwingungen versetzen. Die Gestalt der schwingenden Membran wird ermittelt und diskutiert. Über Vorgänge im Hörapparat, die durch das Schema nicht direkt erfaßt sind, werden einige plausibel erscheinende Vermutungen ausgesprochen.

Kiel, den 24. November 1929.

(Eingegangen 26. Dezember 1929.)

Bestimmung der Konstanten, insbesondere der Kapazität von Strahlungsapparaten[1]).

Von Werner Kolhörster.

Meteorologisch-Magnetisches Observatorium Potsdam.

Systematische Untersuchungen über die Leistungsfähigkeit neuerer Strahlungsapparate liegen bisher nicht vor. Es erscheint daher angebracht, die Ergebnisse mehrjähriger Erfahrungen über die Genauigkeit, mit welcher die Konstanten solcher Instrumente zu ermitteln sind, kurz zusammenzustellen.

Die Untersuchung bezieht sich auf Ionisationsgefäße mit fest eingebautem Elektrometer ähnlicher Ausführung, wie sie vor einiger Zeit beschrieben worden sind[2]). Es sei $I_{0,760}$ die Anzahl der Ionenpaare cm^{-3} sec^{-1} und $L_{0,760}$ das nutzbare Gasvolumen in cm^3 für 760 mm Hg und $t = 0^0$ Celsius, C die Kapazität in cm, e das Elementarquantum in elektrostatischen Einheiten und dv/dt der Voltverlust in der Zeiteinheit, so ist unter Voraussetzung der Sättigung

$$I_{0,760} = \frac{C}{e \cdot L_{0,760}} \cdot \frac{dv/dt}{300}$$

die Ionisierungsstärke in I. Hiernach sind also dv/dt, $L_{0,760}$ und C die zu bestimmenden Größen.

Die Ermittelung des Voltverlustes dv/dt geschieht unter Verwendung von Eichkurven, aus welchen die zu den abgelesenen Skalenteilen gehörigen Spannungen entnommen werden. Die Aufnahme der Eichkurven mit Hilfe von Anodenbatterien und hochohmigen Voltmetern ist einfach und außerordentlich sicher, doch sollte man nur Präzisionsvoltmeter verwenden, weil die gewöhnlichen Instrumente vielfach zu ungenau sind. Die Eichkurven verlaufen durchaus stetig und sind mit Ausnahme des Anfangs nur schwach, aber gesetzmäßig gekrümmt. Ihre zeitliche Konstanz bleibt so gut gewahrt, daß zwischen monatelang auseinander liegenden Eichkurven kaum Unterschiede auftreten. Früher zeigten sich manchmal nach Transporten und starken mechanischen Erschütterungen Parallelverschiebungen in den Kurven, die heute kaum mehr vorkommen. Im übrigen sind dadurch bedingte Fehler für die Messungen selbst unwesentlich, da sie bei der Differenzbildung herausfallen. Änderungen des Neigungswinkels der Eichkurven, die Fehler verursachen würden, wurden bei Schlingenelektrometern noch niemals beobachtet. Die Elektrometer konnten dadurch weiter verbessert werden, daß es gelang, ungekittete Fadensysteme zu bauen. Nach alledem ist bei der Unabhängigkeit von Druck- und Temperaturschwankungen der Voltverlust dv/dt mindestens auf $\pm$ 1 Proz. genau zu ermitteln.

Die Ausmessung des Volumens L der gebräuchlichen Ionisationsgefäße von einigen Litern Inhalt läßt sich durch Auswägen mit Wasser auf wenige Promille genau ermitteln. Da jedoch die Gefäße im allgemeinen nicht mit Gas normaler Dichte s_0 gefüllt sind, und die Ionisierungsstärke der Dichte in dem verwendeten Bereich proportional geht, so muß noch auf Normalbedingungen reduziert werden durch

$$L_{0,760} = L \cdot \frac{s}{s_0} = L \frac{p}{760\,(1 + \alpha t)},$$

d. h. man braucht Druck und Temperatur des Füllgases. Durch Einbau kompensierter Aneroide mit attachierten Thermometern ist man in der Lage, die Gasdichte auf $\pm$ 0,5 Proz. sicher zu bestimmen. Hierfür einfach die beim Schließen der Gefäße beobachteten Drucke und Temperaturen allein zu benutzen, wie es früher meist geschah, ist zu ungenau. Die mit Instrumenten ohne besondere Dichtekontrolle bestimmten Evaschen Zahlen können daher kaum mehr den heutigen Ansprüchen genügen. Noch ist zu erwägen, ob durch Ablesemikroskope Ladesonde und Elektrometeraufbau sogenannte tote Ecken von Einfluß sind, in denen wegen geringerer Feldstärke ganz verschiedene Sättigungsbedingungen herrschen. Man trug dem früher Rechnung, indem

1) Vgl. hierzu V. F. Heß und A. Reitz, Zur Kapazitätsbestimmung von Strahlungsapparaten. Phys. Zeitschr. **31**, 284, 1930.

2) W. Kolhörster, Physik. Zeitschr. **27**, 62, 1926.

man die toten Ecken als Obelisken, bezogen auf die Mitte des Ionisationsraumes, bestimmte und von dem ausgewogenen Volumen abzog, also die in ihnen gebildeten Ionen überhaupt vernachlässigte. Diese Unsicherheit hat man mehr und mehr dadurch beseitigt, daß die ins Innere hineinragenden Teile wie die Sonde möglichst dicht an die Wand verlegt oder wie der Mikroskoptubus konisch ausgebildet wurden. Es gelingt dann, die Korrektionen wegen toter Ecken so klein zu machen, daß sie praktisch bedeutungslos werden. Eine experimentelle Kontrolle bietet hierfür auch die Sättigungsstromkurve, die man zur Ermittelung des verwendbaren Meßbereiches der Instrumente sowieso kennen muß. Als Beispiel einer solchen Bestimmung an einem 4 Liter-Apparat bei Ionisation durch $\beta\gamma$-Strahlen eines Radium-Präparates sei Zahlentafel 1 gegeben.

Zahlentafel 1.

Mittlere Spannung	Stromstärke	
200 Volt	71,5 I.	Praktische Sättigung ($71{,}5 \pm 0{,}2$) I = ($71{,}5$ I $\pm$ 0,3 Proz.
180 „	71,6 „	
160 „	71,4 „	
140 „	71,3 „	
120 „	71,7 „	
100 „	71,4 „	
		Sättigungsdefizit
90 „	70,5 „	1,4 Proz.
80 „	69,6 „	2,7 „
70 „	68,6 „	4,1 „
60 „	67,1 „	6,2 „
50 „	64,0 „	10,5 „

Man sieht, daß der Mittelwert der Stromstärke zwischen 200 und 100 Volt genügend konstant ist, um praktisch als Sättigungsstrom zu gelten. Ein Einfluß toter Ecken macht sich also nicht bemerkbar. Praktische Sättigung zwischen 200 und 100 Volt würde bei den üblichen Abmessungen und der Annahme gleichmäßiger Feldverteilung vom Elektrometer zu den Wandungen etwa 25 bis 12 Volt/cm bedeuten. Unter 100 Volt nimmt bei 4 Liter-Apparaten das Sättigungsdefizit rasch zu, während bei 2 Liter-Apparaten erst bei 80 Volt Zunahme erfolgt. Es ist daher empfehlenswert, die angegebenen Grenzen bei den eigentlichen Beobachtungen nicht zu unterschreiten. Gute Trocknung der Füllgase ist allerdings Voraussetzung, um die erforderliche hohe Beweglichkeit der Ionen zu gewährleisten. Steigt das Sättigungsdefizit, so kann man ziemlich sicher auf ungenügende Trocknung schließen. Hierfür ist dann meist eine ganz geringe Undichtigkeit des Ionisationsgefäßes verantwortlich, die sich bei der Dichtekontrolle mit Aneroid zu erkennen gibt.

Die Bestimmung der Kapazität des Elektrometersystems[1]) kann bei den kleinen Werten von beiläufig 0,4 cm nur dann als gesichert gelten, wenn verschiedene Methoden zu gleichem Ergebnis führen. Denn Formkapazität und andere Einflüsse treten unter den besonderen Verhältnissen bei Strahlungsapparaten derart stark hervor, daß sie von vornherein noch nicht einmal abzuschätzen sind. Z. B. liefert die Differenzmethode ($C_{\text{El+Sonde}} - C_{\text{Sonde}}$) zwar in sich gut übereinstimmende, aber vielfach bis 40 Proz. zu kleine Kapazitätswerte. So blieben nur zwei grundsätzlich verschiedene Methoden verwendbar, nämlich Stromeichung und Ladungsteilung, evtl. noch eine Kombination beider.

Zur Stromeichung wurden folgende Verfahren ausgeführt. 1. Stromeichung mit α-Ionisation unter Verwendung eines sattdicken Präparates von grauschwarzem U_3O_8 von bekanntem Stromwert[2]). 2. Desgleichen mit $\beta\gamma$-Ionisation unter Benutzung von Ladesonde und berechenbarem Zusatzkondensator[3]).

Die Stromeichung mit einem U_3O_8-Standard von bekanntem Stromwert I ergibt die gesuchte Kapazität $X = \dfrac{I}{dv/dt}$, wenn dv/dt die beobachtete Entladungsgeschwindigkeit des Elektrometers bezeichnet. Das Verfahren setzt voraus, daß die Sättigungsbedingungen im Ionisationszylinder in demselben Umfange erfüllt sind wie in dem Vergleichsinstrument, welches zur Bestimmung des Stromwertes des Standards dient. Inwieweit dies zutrifft, ist gesondert zu untersuchen. Der Vorteil dieser einfachen Methode besteht darin, daß die Kapazität frei von irgendwelchen Einflüssen der Ladesonde gemessen wird. Von Nachteil ist, daß der Ionisationszylinder geöffnet und mit aktiver Substanz beschickt werden muß. Die Gefahr einer Infektion und Erhöhung der Eigenstrahlung läßt sich umgehen, indem man für die Messungen einen besonderen Ionisationszylinder benutzt, der dem endgültig verwendeten möglichst gleichkommt. Bedenken wegen nicht absoluter Gleichheit der Zylinder sind bedeutungslos.

Das zu den Messungen benutzte U_3O_8-Präparat war nach dem U_3O_8-Standard der Reichsanstalt kopiert und mit diesem verglichen wor-

1) Anlaß zu dieser besonderen Untersuchung gab ein Briefwechsel mit Herrn Heß, in dessen Verlauf wir uns entschlossen, unabhängig voneinander die Kapazität unserer Instrumente zu bestimmen und gleichzeitig darüber zu berichten.

2) Vgl. St. Meyer und E. Schweidler, Radioaktivität, S. 271, Leipzig 1927.

3) R. A. Millikan und G. H. Cameron, Phys. Rev. **31**, 921, 1928.

den[1]). Bei 1 cm² strahlender Fläche betrug sein Stromwert $1{,}732 \cdot 10^{-3}$ stat. E. oder 31,176 Volt pro min für 1 cm Kapazität, so daß die natürliche Zerstreuung des Zylinders immer unter 1 Proz. dieses Wertes blieb. Der Strahler wurde im Ionisationszylinder so aufgestellt, daß die Mitte seiner kreisrunden Fläche ungefähr senkrecht unter der Mitte des Elektrometersystems stand. Eine Verschiebung in der Horizontalen bis zu 1 cm machte auf die Stromstärke nichts mehr aus. In der Vertikalen konnte durch verschieden lange Rohre das Präparat dem Elektrometer beliebig genähert werden. Dabei nahm die Stromstärke zunächst zu und blieb dann zwischen 3,8 und 2,8 cm Abstand von der Elektrometermitte konstant. Die durch das Einbringen des Präparats bedingte geringe Kapazitätsänderung ließ sich in der Weise bestimmen, daß mit einer genau gleich gearbeiteten Attrappe besondere Strommessungen im Ionisationsgefäß unter Einwirkung von $\beta\gamma$-Ionisation ausgeführt wurden. Die Korrektion ergab sich bei 3,8 bzw. 2,8 cm Abstand des Präparates vom Elektrometer zu 1 bzw. 2 Proz. Als Beispiel einer Meßreihe von je 5 Sätzen zu drei verschiedenen Zeiten sei Zahlentafel 2 gegeben, welche sich auf das 2 Liter-Instrument bezieht. Wie man sieht, stimmen die für Abstände von 3,8 bzw. 2,8 cm von der Elektrometermitte erhaltenen Werte sehr gut überein.

Zahlentafel 2.
Stromeichung mit α-Ionisation
(2 Liter-Apparat 5504).

Abstand Präparat-Elektrometermitte	Kapazität in cm			Mittel
3,8 cm	0,378	0,381	0,381	0,380
2,8 „	0,377	0,380	0,379	0,379

Da jedoch wegen der hohen Ionisierungsdichte bei dieser Anordnung gewisse Bedenken bestanden, so wurde versucht, durch verminderten Druck die Ionendichte aufzulockern. Dann kann das Präparat direkt an der Zylinderwand bleiben, so daß keine Kapazitätsänderung eintritt (wie festgestellt wurde). Aber wegen der geometrischen Bedingungen würden bei Verminderung des Druckes sehr bald α-Teilchen die Seitenwände des Ionisationsgefäßes erreichen und dort vorzeitig absorbiert werden. Infolgedessen wurden die Strahlen durch eine kurze kegelförmige Blende meßbar und soweit beschränkt, daß die Ionisationswirkung aller austretenden Strahlen auch dann noch voll ausgenutzt werden konnte, wenn ihre Reichweite den Abstand zwischen Präparat und Elektrometer schon wesentlich überschritt. Die auf diese Weise erhaltenen Kapazitätswerte stimmten mit den nach dem ersten Verfahren gemessenen so überein, daß das angegebene, einfachere Verfahren ohne Druckänderung als zuverlässig gelten kann.

2. Die Stromeichung mit $\beta\gamma$-Strahlen unter Verwendung von Zusatzkondensatoren ist eine Anpassung an das von Millikan und Cameron[1]) benutzte Verfahren. Wegen Einzelheiten kann daher auf die beiden Autoren verwiesen werden. Es beruht auf drei Messungen der Entladungszeit des Elektrometers unter Einwirkung einer passend gewählten γ-Strahlenquelle. Zunächst wird die Zeit t_1 bestimmt, in welcher die Fäden zwischen bestimmten Skalenteilen ablaufen, dann wird die Sonde und ein kleiner Zylinderkondensator mit dem Elektrometer verbunden und nunmehr ebenso die Zeit t_2 gemessen, in welcher die Fäden dieselben Skalenteile durchlaufen. Schließlich wird dasselbe für einen zweiten längeren aber sonst ganz gleichen Zylinderkondensator wiederholt, woraus man t_3 erhält. Dann ist die gesuchte Kapazität

$$x = \frac{C \cdot t_1}{t_3 - t_2},$$

wobei

$$C = \frac{1}{2} \frac{l}{\log nat\,(a/b)}$$

(l Längendifferenz der beiden Zylinderkondensatoren, a und b äußerer bzw. innerer Zylinderdurchmesser). Das Auftreten der Zeitdifferenz $(t_3 - t_2)$ ist zwar prinzipiell recht unerwünscht, weil die Meßgenauigkeit außerordentlich beeinträchtigt wird, aber es braucht die Sondenkapazität nicht bekannt zu sein, weil sie herausfällt. Es bleibt daher nur die aus der Längendifferenz der beiden Zylinderkondensatoren exakt zu berechnende Kapazität, da beide Kondensatoren gleiche Randbedingungen aufweisen.

Das von den Herren Heß und Reitz (l. c.) ausgearbeitete Verfahren ist diesem insofern ähnlich, als an Stelle der zu berechnenden Zusatzkapazität die experimentell zu bestimmende des Systems Elektrometer + Sonde benutzt wird.

Eine Korrektion wegen der Volumina der Zusatzkondensatoren L_2 bzw. L_3 (L_1 ist Volumen des Ionisationsgefäßes) kann noch angebracht werden, so daß sich ergibt

$$x = \frac{c \cdot t_1}{(1 + L_3/L_1)\,t_3 - (1 + L_2/L_1)\,t_2}.$$

Dabei wird angenommen, daß die Ionisierungsstärke in den Zusatzkondensatoren sich ebenso, wie im Ionisationsgefäß verhält. Dagegen spricht

1) Herrn Bothe bin ich für Überlassung der Mittel des Radium-Laboratoriums der Reichsanstalt zu ganz besonderem Danke verpflichtet.

1) R. A. Millikan und G. H. Cameron, Phys. Rev. **31**, 912, 1928.

Zahlentafel 3.

Stromeichung mit		Ladungsteilung mit			Mittel
U_3O_8	Zusatzkondensator	Harms-Kondensator	Wulf-Kondensator	Schwingung	$\frac{1+4+5}{3}$
1	2	3	4	5	
4 Liter-App. 0,57$_6$	0,61$_3$	0,57	0,56$_2$	0,57$_0$	0,569
0,41$_9$	0,48$_2$	0,40$_3$	0,41$_3$	0,41$_8$	0,417
0,38$_9$	0,44$_7$	0,38	0,39$_9$	0,38$_6$	0,391
2 Liter-App. 0,37$_9$	0,38$_5$	0,38	0,38$_5$	0,38$_0$	0,381
0,33$_9$	0,36$_1$	0,33	0,34$_4$	0,34$_2$	0,342
0,34$_4$	0,37$_3$	0,34	0,34$_8$	0,34$_0$	0,344

daß Evesche Zahlen für engere Gefäße anwachsen. Ferner spielt in der hier benutzten Abänderung die Ladesonde doch noch eine Rolle, weil ihre Kapazität die Zeiten t_2 und t_3 derartig vergrößert, daß die Differenz als solche großer Zahlen weniger genau zu messen ist. Man könnte daran denken, die Ladesonde durch eine kürzere Verbindung mit kleinerer Kapazität zu ersetzen. Jedoch ist wegen der zentralen Lage des Elektrometersystems keine wesentliche Verbesserung damit zu erzielen. Auch sind die hier benutzten Systeme viel zu winzig, um ein direktes Ansetzen der Innen-Elektroden der Zylinderkondensatoren zu ermöglichen. Schließlich erfordert die Justierung der Innenelektrode außergewöhnliche Genauigkeit, da die geringsten Änderungen schon ganz erhebliche Fehler bei der kleinen Vergleichskapazität zustande bringen. Nach alledem wurde dies Verfahren aufgegeben, weil es nicht gelang, die Werte sicher zu reproduzieren. Bei asymmetrischen Elektrometern, von denen Teile bis in die Nähe der Zylinderwandungen reichen, liegen die Verhältnisse günstiger; solche Elektrometer haben größere, also leichter zu messende Kapazität, doch sind sie aus diesem Grunde weniger empfindlich und besitzen ungleichmäßigere Feldverteilung.

3. Für die Ladungsteilung gilt folgendes: Sei das Elektrometer durch Vermittelung der Ladesonde zur Spannung V_1 aufgeladen, die man im übrigen nicht abzulesen braucht, so wird nach Abdrehen und Erden der Sonde die Spannung V_2 gemessen. Auf der Elektrometerkapazität X befindet sich also die Elektrizitätsmenge $X \cdot V_2$. Verbindet man die Sonde wieder mit dem Elektrometer, wobei die Gesamtkapazität $(E + S)$ sei, so liest man das Potential V_3 ab, und es gilt $X = (E + S) \cdot V_3 : V_2$.

Die Untersuchungen haben gezeigt, daß $(E + S)$ sowie V_3/V_2 unschwer auf $\pm$ 1 Proz. sicher zu bestimmen sind.

Zur Messung der Kapazität $(E + S)$ von etwa 3 cm wurden geeichte Wulf-Kondensatoren[1]) und die Normalkapazitätsmeßbrücke der Reichsanstalt[1]) in Verbindung mit dem Differentialkondensator nach Zickner[2]) benutzt, um Anschluß an diesen Standard zu haben, während die Firma Günther & Tegetmeyer, Braunschweig[3]), mit Harms-Kondensator[4]) arbeitete.

In der Zahlentafel 3 sind einige Ergebnisse zusammengestellt, wie sie im Laufe der Untersuchungen bei denselben Instrumenten aber verschiedenen Elektrometersystemen erhalten wurden. Es handelt sich um Mittelwerte aus mindestens je einem Satz von mindestens 10 Beobachtungen bei der Ladungsteilung oder je 5 Einzelbeobachtungen bei den Stromeichungen. Höchste und tiefste Einzelwerte schwanken um nicht mehr als $\pm$ 1 Proz. der hier gegebenen Mittelwerte.

Es zeigt sich, daß, abgesehen von der Stromeichung mit $\beta\gamma$-Ionisation und Zusatzkondensator, welche meist zu hohe und nie mit Sicherheit reproduzierbare Werte lieferte, die anderen Methoden eine so bemerkenswerte Übereinstimmung unter sich aufweisen, daß in ihnen systematische Fehler nicht anzunehmen sind.

Man wird also bei kleinerer Sondenkapazität am einfachsten und schnellsten mit Ladungsteilung zum Ziele kommen, und die Bestimmung der Elektrometer + Sondenkapazität $(E + S)$ mit den jeweils zur Verfügung stehenden Instrumenten ausführen.

Eine Messung aus 10 Einzelwerten erfordert rund eine Stunde.

Für Instrumente mit Ladesonden höherer Kapazität, insbesondere magnetische Sonden ist man zu direkter Bestimmung auf Stromeichung mit U_3O_8-Präparaten oder auf das von den

1) Th. Wulf, Physik. Zeitschr. **26**, 354, 1925.

1) E. Giebe und G. Zickner, Arch. f. El. **11**, 109, 1922.

2) G. Zickner, Jahrb. drahtl. Tel. **25**, 26, 1925. Herrn Zickner möchte ich auch an dieser Stelle für seine Unterstützung bei diesen Messungen herzlich danken.

3) Der Firma Günther & Tegetmeyer, Braunschweig bin ich für die Ausführung dieser ergänzenden Messungen zu großem Danke verpflichtet.

4) F. Harms, Physik. Zeitschr. **5**, 47, 1904.

Herren Heß und Reitz (l. c.) entwickelte Verfahren angewiesen. Indirekt kann man jedoch, wenn man über ein Radiumpräparat gemessener Stärke verfügt und die Evesche Zahl der Ionisationsgefäße irgendwoher kennt, auch daraus die Kapazität ableiten. Allerdings sind die Eveschen Zahlen sehr stark von den Versuchsbedingungen abhängig, so daß bei derartigen Vergleichsmessungen mit einer Unsicherheit von mehreren Prozenten zu rechnen sein dürfte. Nimmt man jedoch diese Fehlergrenze mit in Kauf, so ist die Methode außerordentlich bequem. Wegen des Einflusses der Sekundärstrahlung der Umgebung[1]) müssen die Versuchsbedingungen, unter denen die Eveschen Zahlen gewonnen worden sind, reproduzierbar definiert sein. In unserem Falle wurde das Instrument in einem genügend großen Zimmer auf einem üblichen Laboratoriums-Stelltisch aus Holz (Tischplattendurchmesser 38 cm, Dicke 4 cm) aufgestellt. Der Abstand Apparatmitte Boden betrug 140 cm, mindestens ebenso weit war der Raum nach allen anderen Richtungen hin frei. Zwischen Decke (4 m hoch) und Apparat hing das Radiumpräparat von $0{,}724 \cdot 10^{-3}$ gr ungefähr 80 cm über der Instrumentenmitte. Als Mittel für die Eveschen Zahlen ergaben sich für das

4 Liter-Instrument $K_{0,760} = 5{,}42 \cdot 10^9$
$K_{0\,Fe\,760} = 5{,}95 \cdot 10^9$,
2 Liter-Instrument $K_{0,760} = 5{,}77 \cdot 10^9$
$K_{0\,Fe\,760} = 6{,}37 \cdot 10^9$

mit einer Differenz der Einzelwerte unter $\pm$ 1 Proz.

Zusammenfassend kann also gesagt werden, daß die für die Messung der Ionisierungsstärke in Betracht kommenden Größen bei Strahlungsapparaten derzeitiger Bauart mit einer Genauigkeit von $\pm$ 1 Proz. meß- und reproduzierbar sind.

Der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft sei auch an dieser Stelle für die Mittel zu der Untersuchung besonders gedankt.

1) Vgl. V. F. Heß, Physik. Zeitschr. **14**, 610, 1913.

Weihnachten 1929.

(Eingegangen 13. Januar 1930.)

Zur Kapazitätsbestimmung von Strahlungsapparaten.

Von V. F. Hess und A. Reitz.

Die Übereinstimmung zwischen den Angaben verschiedener Autoren hinsichtlich der Absolutwerte der durch die kosmische Ultrastrahlung (Höhenstrahlung) erzeugten Ionisation läßt auch heute noch manches zu wünschen übrig. Der größte Teil dieser Unstimmigkeiten wird — worauf von verschiedenen Autoren bereits hingewiesen worden ist — auf Abweichungen in den Kapazitätsbestimmungen der betreffenden Strahlungsapparate zurückzuführen sein.

Daher besteht ein dringendes Bedürfnis nach verläßlicheren Methoden zur Bestimmung sehr kleiner Elektrometerkapazitäten (unter 1 cm). In den letzten Jahren hat man versucht, mittels der besonders durch Zickner in der Physik.-Techn. Reichsanstalt und durch V. D. Poll und J. Groeneveld bei Philips (Eindhoven) ausgebildeten, vortrefflichen Schwingungsmethode weiter zu kommen[1]), ferner haben R. A. Millikan und G. H. Cameron[2]) die Stromeichungsmethode mit Zusatzkapazität versucht, von denen im vorausgehenden Artikel Herrn Kolhörsters ja schon die Rede ist.

Der erreichte Genauigkeitsgrad kann in diesen und anderen Methoden erheblich überschätzt werden, wenn man nicht, wie es Herr Kolhörster nunmehr getan hat, die Resultate verschiedener Methoden miteinander vergleicht.

Bei so kleinen Kapazitäten, wie sie die Elektrometersysteme der Strahlungsapparate aufweisen, spielt der Einfluß der sogenannten Formkapazität eine sehr bedeutende Rolle und manche Methoden scheinen diesem Einfluß nicht voll Rechnung zu tragen. Wie bedeutend dieser Einfluß ist, mag durch folgende Zahlen illustriert werden: Wenn man die nach irgendeiner Methode bestimmte Kapazität der Ladesonde von der nach gleicher Methode bestimmten Gesamtkapazität (Ladesonde plus Fadensystem) bei einem der neueren Kolhörsterschen Strahler subtrahiert, ergeben sich für das Fadensystem Kapazitäten von beiläufig 0,3 cm, während die richtigen Werte der Kapazität des Fadensystems (nach völligem Abdrehen der Ladesonde) um 0,5 cm liegen.

Die im vorhergehenden Artikel beschriebene Kapazitätseichung des Fadensystems nach der Strommethode mittels eines α-strahlenden Ur_3O_8-Präparats nach W. Kolhörster ist völlig frei von den erwähnten Einflüssen, hat aber, wie der Autor selbst bemerkt, ebenso wie die Millikan-

1) J. Clay, Amsterd. Proceed. **32**, 1091—1097, Nr. 10, 1928.
2) R. A. Millikan und G. H. Cameron, Phys. Rev. (2) **31**, 912, 1928.

Cameronsche Methode den Nachteil, daß das Gehäuse des Strahlers zum Zwecke der Kapazitätsbestimmung geöffnet werden muß, was stets eine gewisse Gefahr für den Apparat mit sich bringt, weshalb Herr Kolhörster noch ein zweites Verfahren (das der Ladungsteilung) benutzt. Wir haben unabhängig davon schon seit Jahresfrist mit mehreren Exemplaren des Kolhörsterschen Zweischlingenstrahlungsapparats und einem Wulf-Kolhörsterschen Strahler mit magnetischer Sonde ein anderes Verfahren der Absolutbestimmung der Kapazität ausgearbeitet, welches sich durchaus bewährt hat und das wir nun beschreiben wollen. Das Fadensystem mit angedrehter Ladesonde hat bei den erwähnten Instrumenten eine Gesamtkapazität $C = 5$ bis 7 cm, die mit dem Th. Wulfschen Zylinderkondensator mit großer Genauigkeit bestimmt werden kann. Wir verwendeten die von Wulf[1]) beschriebene „zweite Methode" mit zwei von der Physik.-Techn. Reichsanstalt in Charlottenburg neu geeichten Wulfschen Zylinderkondensatoren[2]) (geliefert von der Firma E. Leybolds Nfg., Köln a. Rh.); der Strahler wird mittels der Ladesonde mit dem Zylinderkondensator verbunden und hoch aufgeladen (abgelesenes Potential V_1 Volt). Dann trennt man den Kondensator von der Ladesonde, das Potential sinkt ein wenig (V_2). Hierauf wird die Ladesonde (plus dem Fadensystem) geerdet und sofort wieder mit dem Kondensator verbunden. Das System zeigt nun ein kleineres Potential (V_3), das aber gar nicht abgelesen zu werden braucht und man verkleinert nun durch Drehen der Mikrometerschraube des Kondensators die Kapazität so lange, bis das ursprüngliche Potential (V_1) wieder erreicht ist. Bedeutet k die einer vollen Umdrehung der Mikrometerschraube entsprechende Kapazitätsänderung (bei unserem Kondensator im Mittel 0,486 cm, pro $^1/_{100}$ Umdrehung also rund 0,005 cm) und waren n Umdrehungen nötig, um V_1 wiederherzustellen, so ist die zu bestimmende Gesamtkapazität C des Fadensystems mit angelegter Ladesonde

$$C = n \cdot k \cdot \frac{V_1}{V_2}.$$

Nach diesem Verfahren lassen sich die hier in Betracht kommenden Kapazitäten (etwa 5 bis 8 cm) auf etwa 0,3 Proz. genau ermitteln. Das Verfahren ist ungemein einfach, präzise und allgemein empfehlenswert, zumal es eigentlich von der Spannungseichung des Instruments unabhängig ist. (V_1 und V_2 können hinlänglich genau in Skalenteilen ausgedrückt werden.)

1) Th. Wulf, Physik. Zeitschr. **26**, 354, 1925.

2) Herrn Prof. Wulf möchte ich auch hier noch für die leihweise Überlassung eines dieser Kondensatoren herzlich danken.

Um nun die Kapazität c des Fadensystems allein zu ermitteln, verwendeten wir eine Strommethode bei künstlicher Ionisation durch β- und γ-Strahlen: Zunächst wird der Normalverlust des Systems (in Volt/sec oder Skalenteile pro Sek.) mit und ohne Ladesonde ermittelt entsprechend dem Sättigungsstrom, verursacht durch Wandstrahlung des Gefäßes, kosmische Ultrastrahlung, Mauerstrahlung und Isolationsverlust): Diese Stromstärke sei bei abgedrehter Ladesonde

$$i_0 = c \cdot w_1 \qquad (1)$$

(w_1 bedeutet also den Spannungsverlust des Systems allein pro sec ohne Radiumpräparat). Bei an das Fadensystem angelegter Ladesonde wird diese Stromstärke i_0' im allgemeinen etwas größer sein als i_0, da ja ein zweiter Isolator (die Quarzglasfassung der Ladesonde) hinzukommt:

$$i_0' = C \cdot w_2. \qquad (2)$$

Sodann wird ein eingeschmolzenes Radium- oder Mesothorpräparat von passender Stärke (z. B. 0,1 mg *Ra*-äquivalent) in solcher Entfernung vom Strahler befestigt, daß die Wanderung der Elektrometerfäden einerseits bei abgedrehter Ladesonde nicht zu rasch (etwa 10 Skalenteile einseitig in 40 bis 60 Sekunden), andererseits bei angedrehter Ladesonde nicht zu langsam wird (z. B. 10 $Sc\,T$ in 600 sec). Bei dieser durch Radium verursachten Ionisierungsstärke sei die erzeugte Sättigungsstromstärke i.

Der beobachtete Gesamtstrom bei abgedrehter Ladesonde ist dann

$$i + i_0 = c \cdot w_3, \qquad (3)$$

wobei w_3 den beobachteten sekundlichen Spannungsverlust einschließlich der Radiumwirkung bedeutet.

Bei ungeänderter Stellung des Radiumpräparats wird nur eine Reihe von Bestimmungen des Spannungsverlustes pro Sekunde w_4 bei an das Fadensystem angelegter Ladesonde durchgeführt. Dieser entspricht der Stromstärke

$$i + i_0' = C \cdot w_4. \qquad (4)$$

Subtraktion von (1) und (3) bzw. (2) und (4) liefert

$$i = c\,(w_3 - w_1) = C\,(w_4 - w_2), \qquad (5)$$

woraus sich die gesuchte Kapazität des Fadensystems direkt ergibt zu

$$c = C \cdot \frac{w_4 - w_2}{w_3 - w_1}. \qquad (6)$$

Nachdem C vorher z. B. elektrostatisch gemessen wurde, läßt sich also die ganze Bestimmung durch vier Messungen von Voltverlusten pro Zeiteinheit erledigen.

Die Meßbedingungen werden um so günstiger sein, je kleiner die Kapazität der Ladesonde

relativ zu der des Fadensystems ist. Im folgenden soll gezeigt werden, daß bei den bisher handelsüblichen Apparaten von Kolhörster trotz des ungünstig hohen Wertes des Verhältnisses $C/c = 12$ bis 16 die erreichbare Genauigkeit noch immer ausreicht. Bei den Kolhörster-Strahlern neuester Type 1929 (kleinere Ladesondenkapazität)[1]) liegen die Verhältnisse noch wesentlich günstiger.

Ein großer Vorteil der geschilderten Methode liegt darin, daß die ausgeführte Kapazitätsbestimmung völlig unabhängig von der Spannungseichung des Instrumentes ist und durchgeführt werden kann, auch wenn man die Eichung der Elektrometerskala in Volt gar nicht zur Verfügung hat. Man braucht hiezu nur darauf zu achten, daß man die (dann in *Sc T.* auszudrückenden) Spannungsverluste $w_1 - w_4$ sämtlich im gleichen Bereich der Okularskala (z. B. *Sc T.* 70—50) durchführt. Es ist günstig, die Bewegung des linken und rechten Fadens unabhängig und gleichzeitig mit zwei Stoppuhren zu verfolgen und die Mittelwerte der Durchlaufzeiten rechts und links zu verwenden.

Zwei kleine Korrekturen sind noch anzubringen: Bei angedrehter Ladesonde ist zu berücksichtigen, daß auch der Raum außerhalb des Strahlers durch das Radium und die übrigen Ionisatoren ionisiert ist und man muß, um definierte Verhältnisse zu schaffen, die normale Deckkappe über dem Ladeknopf aufschrauben. Dadurch ist dieser in einem im Vergleich zum Volumen der Strahlers sehr kleinen Raum eingeschlossen, in dem natürlich ebenfalls Sättigungsstrom herrscht. Die Ionisierungsstärke in diesem Raum wird wegen der Nähe der Gefäßwände wohl etwas höher sein, als im Strahler selbst. Doch fällt das überhaupt nicht ins Gewicht, nachdem dieses Hohlvolumen nur 25 ccm, das Strahlervolumen aber 4200 ccm beträgt. Der beobachtete Wert $(w_4 - w_2)$ ist also noch durch 1,004 zu dividieren.

Weiters ist es natürlich besser, die bei angelegter Ladesonde anzustellenden Beobachtungen von w_2 und w_4 so auszuführen, daß während jeder Messung die Kappe aufgeschraubt bleibt. Dadurch aber ist die Gesamtkapazität C etwa um das 1,01-fache vergrößert, so daß die mittels Wulf-Kondensator (bei abgenommener Schutzkappe der Ladesonde) gemessenen Werte der Gesamtkapazität noch mit dem Faktor 1,011 zu multiplizieren sind, um den bei aufgesetzter Kappe entsprechenden Wert der Gesamtkapazität zu erhalten. In den Formeln (1) bis (6) sei unter C bereits der so korrigierte Wert der Kapazität Fadensystem plus Ladesonde (mit aufgesetzter Schutzkappe) verstanden.

Bevor wir die Resultate der Messungen an verschiedenen Apparaten besprechen, seien noch numerische Werte einer typischen Meßreihe angeführt:

Apparat II

$w_1 = 0{,}0115$ V/sec $\qquad w_4 - w_2 = 0{,}0495 \qquad \dfrac{w_4 - w_2}{w_3 - w_1} = 0{,}0785$

$w_2 = 0{,}0035$ „
$w_3 = 0{,}6416$ „
$w_4 = 0{,}0530$ „ $\qquad w_3 - w_1 = 0{,}6301$

$C = 7 \cdot 36$ daher $c = 0{,}578$ cm.

Jeder der Werte w_1 bis w_4 war durch Mittelwertbildung aus 5 bis 10 Einzelmessungen gewonnen.

Um nun die erreichbare Genauigkeit zu prüfen, wurden an vier Apparaten von uns beiden ganz unabhängig und zu um Monate auseinander liegenden Terminen derartige Meßreihen wiederholt durchgeführt.

Die folgende Tabelle gibt die in den einzelnen Messungsreihen erhaltenen Resultate, verglichen mit den nach dem Verfahren der Ladungsteilung erhaltenen, von der Firma Günther & Tegetmeyer angegebenen Kapazitätswerten.

Ein Vergleich der Einzelwerte zeigt, daß die Abweichungen vom Mittelwerte bei den Apparaten von der Zweischlingentype[2]) Kolhörsters (mit mechanischer Ladesonde I, II, IV) im allgemeinen bei etwa 1 Proz. liegen. Beim Wulf-Kolhörsterschen Apparat III mit magnetischer Ladesonde sind die Abweichungen etwas größer, was darauf zurückzuführen ist, daß diese Sonde bei unserem Instrument manchmal schlechten Kontakt gibt, was (wenn es bemerkt wird) nur durch Klopfen am Apparat beseitigt werden kann. Immerhin können bei den Bestimmungen von w_4 und besonders w_2 dadurch manchmal größere Abweichungen verursacht werden.

Die Übereinstimmung der Mittelwerte der Kapazitäten mit den vom Fabrikanten angegebenen, nach dem Verfahren der Ladungsteilung, also rein elektrostatisch ermittelten Werten ist bei Apparat I, II und IV ausgezeichnet ($\pm$ 1 Prozent), bei Apparat III mittelmäßig (etwa $\pm$ 5 Proz.). Diese Übereinstimmung ist recht bemerkenswert, denn sie zeigt, daß die Angaben der Firma Günther & Tegetmeyer auch bei diesen kleinen Kapazitäten doch recht verläßlich sind. Doch darf nicht verschwiegen werden, daß in manchen Fällen, besonders vor dem Jahre

1) Vgl. die vorhergehende Arbeit von W. Kolhörster.

2) Physik. Zeitschr. **27**, 62, 1926.

Tabelle I.

Apparat Nr.	C	$\frac{w_4 - w_2}{w_3 - w_1}$	c (nach der Strommethode)	c (nach der Methode der Ladungsteilung)
I	7,66 cm	0,0716 0,0702 0,0717	0,548 cm 0,537 cm 0,549 cm	
			Mittel: 0,546 cm	0,55 cm
II	7,36 cm	0,0784 0,0786 0,0774	0,577 cm 0,578 cm 0,569 cm	
			Mittel: 0,575 cm	0,57 cm
III (Februar 1929)	5,45 cm	0,1481 0,1553 0,1549 0,1528	0,807 cm 0,846 cm 0,844 cm 0,832 cm	
			Mittel: 0,832 cm	0,78 cm
III (November 1929)	5,44 cm	0,1520 0,1513 0,1494	0,827 cm 0,823 cm 0,813 cm	
			Mittel: 0,821 cm	0,78 cm
IV	7,649 cm	0,0609 0,0594 0,0585	0,465 cm 0,454 cm 0,447 cm	
			Mittel: 0,455 cm	0,44 cm

1928 Abweichungen von bis zu 30 Proz. festgestellt werden konnten. Bei den neuesten Formen der Kolhörsterschen Strahlungsapparate werden, wie Herr Kolhörster in dem vorhergehenden Aufsatz zeigt, diese Kapazitätsbestimmungen nach der Methode der Ladungsteilung verläßlicher sein, als bei den älteren Apparaten (1926—1928), bei denen das Verhältnis C/c etwa 12 bis 16 beträgt.

Unser Stromeichungsverfahren bleibt bei allen Typen der Strahler gleich gut anwendbar. Eine Einzelmessung von c erfordert, wenn man sie mit größter Sorgfalt durchführt und w_1 und w_2 vor und nach den Radium-Messungen (w_3 und w_4) mehrmals bestimmt, etwa 4—5 Stunden. Voraussetzung der Durchführbarkeit der Messung ist gute Isolation der Ladesonde (trockene Luft).

Das in der vorhergehenden Abhandlung Herrn Kolhörsters erwähnte einfache Verfahren der Kapazitätsmessung durch „Bestimmung der Eveschen Zahl"[1]) wird zu Orientierungszwecken von Herrn Kolhörster und dem einen von uns[1]) schon seit langer Zeit angewendet. Der Absolutwert der Eveschen Zahl wird jedoch von so mannigfachen Umständen beeinflußt, daß man bei nicht völlig genauer Reproduktion der Standard-Versuchsbedingungen mit einer Fehlergrenze von einigen Prozent wird rechnen müssen. Apparate verschiedener Type, z. B. der Wulf-Kolhörstersche Apparat[1]) und der Kolhörstersche Zweischlingenapparat können, wie man aus der folgenden Tabelle II entnehmen kann, Unterschiede der Eveschen Zahl von 10 Proz. ergeben. Bei Apparaten gleicher Type betragen die Abweichungen verschiedener voneinander unabhängiger Messungen im allgemeinen weniger als $\pm$ 2 Proz., wie die folgende Tabelle zeigt (siehe Apparat I und IV).

Die Angaben von Apparat I und IV beziehen sich wieder auf das normale Kolhörstersche Instrument mit ca. 4 Liter Rauminhalt und Zweischlingenelektrometersystem, die von III auf den Wulf-Kolhörsterschen Apparat mit Temperaturkompensation und magnetischer Ladesonde. Unsere zahlreichen Bestimmungen der Eveschen Zahl K an älteren Apparaten sind nicht berücksichtigt, da bei diesen die Temperatur und Druck des Füllgases nicht so gut definiert waren. Überhaupt sind die Messungen von K bei den Strahlungsapparaten erst dann besser definierbar geworden, als sich die Firma Günther & Tegetmeyer (Braunschweig) über unseren und anderer Fachkollegen Wunsch entschloß, in das Instrument ein Präzisionsaneroid und ein Thermometer

[1]) Vgl. V. F. Hess, Physik. Zeitschr. **14**, 610 bis 617, 1913.

[1]) W. Kolhörster, Zeitschr. f. Phys. **5**, 107, 1921.

Tabelle II.

Evesche Zahlen (K) bei Strahlungsapparaten.

Apparat Nr.	K (760 mm, 0° C) (ohne Korrektion auf Absorption der γ-Strahlen in der Wand des Apparates)	K' (760 mm, 0° C) (korrigiert auf Absorption der γ-Strahlen in der Wand des Strahlers)
I (Februar 1929)	$5{,}61 \cdot 10^9$	$6{,}11 \cdot 10^9$
III (Februar 1929)	$6{,}15 \cdot 10^9$	$6{,}71 \cdot 10^9$
III (Dezember 1929)	$6{,}24 \cdot 10^9$	$6{,}81 \cdot 10^9$
IV (November 1929)	$5{,}48 \cdot 10^9$	$5{,}98 \cdot 10^9$

einzubauen. Dadurch kann man jetzt endlich auch sofort etwa eintretende Undichtigkeiten des Apparats feststellen.

Bei den in Tab. II aufgeführten Bestimmungen von K sind die erhaltenen Ionisationswerte stets auf 760 mm Druck und 0° C umgerechnet. Die Zahlen K bedeuten die unter diesen Verhältnissen durch die γ-Strahlen eines geeichten Radiumpräparats im Strahler selbst hervorgerufene Ionisation (wobei wohl die Absorption der γ-Strahlen in den Hüllen des Präparats, nicht aber in der Wand des Strahlers berücksichtigt wurde). Die Zahlen K' in Tab. II sind auch auf die γ-Strahlen-Absorption in der 3 mm dicken Zinkwand (App. I, III) oder in der 2,5 mm dicken Walzeisenwand (App. IV) korrigiert und daher unmittelbar mit den unter ziemlich gleichartigen Verhältnissen gemessenen von Herrn Kolhörster am Schlusse seiner Abhandlung gegebenen Werten von K vergleichbar. Der Korrektionsfaktor beträgt für die Absorption in einer 3 mm dicken Zinkwand 0,917.

Bei unseren Messungen wurde das Radiumröhrchen (0,401 mg Ra) horizontal seitlich vom Apparat in 160 cm Entfernung an einem Stativ befestigt, innerhalb eines 2 mm dicken Bleirohres. Der Apparat stand 120 cm über dem Fußboden auf einem 3 cm dicken Holztischchen und war von den Wänden des Zimmers allseits mindestens 2,5 m entfernt.

Unser Mittelwert K' für die Zweischlingeninstrumente I und IV ($6{,}04 \cdot 10^9$) weicht aber immerhin vom Kolhörsterschen Wert für gleiche Apparattype ($5{,}95 \cdot 10^9$) noch um 1,5 Proz. ab. Man muß jedenfalls feststellen, daß man umgekehrt, bei Bestimmung der Kapazität eines Strahlers aus der gegebenen Eveschen Zahl der gleichen Apparattype Abweichungen von mehreren Prozent wird in Kauf nehmen müssen. Diese Methode wird daher nach wie vor nur zu Orientierungszwecken empfohlen.

Eine Wiederholung der Eveschen Versuche[1]) mit Ionisationskammern aus dünnster Aluminiumfolie und aus Papier zeigt, daß die γ-Strahlenwirkung von Radium in Luft (ohne Sekundärstrahlung der Gefäßwand) eine Evesche Zahl von etwa $4{,}65 \cdot 10^9$ (bezogen auf Luft von 0° u. 760 mm) ergibt. In Metallgefäßen kann die Evesche Zahl keinesfalls kleiner als $5 \cdot 10^9$ sein. Wenn einzelne Autoren erheblich kleinere Werte angeben, z. B. Büttner[2]) $3{,}5 \cdot 10^9$, Clay[3]) $3{,}81 \cdot 10^9$ (wohl bei Zimmertemperatur), so zeigt dies nur, daß die Kapazitäten der von ihnen verwendeten Apparate erheblich zu niedrig angenommen waren.

Graz, Lehrkanzel für Experimentalphysik an der Universität.

1) A. S. Eve, Phil. Mag. (6) **22**, 651, 1911.
2) K. Büttner, Zeitschr. f. Geophysik **2**, 187, 1926.
3) I. Clay, l. c. S. 1.

(Eingegangen 13. Januar 1930.)

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität München Dr. Ing. Alfred Treibs und Dr. Ing. Hermann Fink für Gärungschemie und angewandte Chemie, an der Universität Berlin Dr. Werner Kolhörster für Physik.

Ernannt: Der Leiter des Physikalisch-chemischen Laboratoriums der Metallbank Frankfurt a. M. Professor Dr. Hans Ritter v. Halban zum ord. Professor der physikalischen Chemie an der Universität Zürich, der Privatdozent an der Technischen Hochschule Wien Dr. Ludwig Eckhart zum ord. Professor für darstellende Geometrie an der gleichen Hochschule, der Privatdozent für darstellende und projektive Geometrie an der Technischen Hochschule Wien Dr. Leopold Krames zum a. o. Professor an der Deutschen Technischen Hochschule Brünn.

Gestorben: Der ord. Professor der Chemie an der Technischen Hochschule in Berlin Geh. Regierungsrat Dr. Robert Franz Pschorr.

Gesuche.

Theoretischer Physiker
mehrere Arbeiten (Hydrodynamik, Wellenmechanik),
sucht Assistentenstelle
an Universität oder technischer Hochschule.
Angebote erb. unt. S.H.25 an den Verlag der Physik. Ztschr.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.